Correction du problème 2 :

Q1 : $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *or* $det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *en développant par rapport à la première colonne et en itérant* $det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = det(C)$*, de même* $det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} A & B' \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ *en développant par rapport à la dernière ligne, ainsi* $det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \det(A)$

Finalement $det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$

Q2 : Si la matrice A est diagonalisable alors son polynôme minimal est scindé à racines simples (SARS) et ses racines sont les valeurs propres , donc $min_A(x) = \prod_{k=1}^{p}(x-\lambda_k)$

Q3 : Si le polynôme P annule A alors le polynôme minimal de A divise P, ainsi min_A *sera SARS et A sera diagonalisable et* $Sp(A) \subset \{\mu_i,\ i \in [\![1,p]\!]\}$

Q4 : Il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$*, alors par récurrence immédiate on prouve que pour tout entier naturel k on a* $B^k = P^{-1}A^kP$*, on pose le polynôme* $T(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_kx^k$

Alors $T(B) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_kB^k = P^{-1}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_kB^k\right)P = P^{-1}T(A)P$*, ainsi* $T(A)$ *et* $T(B)$ *sont semblables*

Q5 : $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ *alors* $\chi_U(x) = (x-1)(x-2)$*, ce polynôme est SARS donc U est diagonalisable et son spectre est* $\{1,2\}$

On a $E_1(U) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$ *et* $E_2(U) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ *on pose alors* $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ainsi $P^{-1}UP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Q6 : $Q = \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix}$*. On pose* $R = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$ *alors* $QR = RQ = I_{2n}$ *donc Q est inversible et* $Q^{-1} = R$

Calculons $Q^{-1}\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$*, donc* $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ *est semblable à* $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$

Q7 : On suppose que A est diagonalisable, il existe $S \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* Δ *diagonale telles que* $A = S\Delta S^{-1}$

Or $\begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix}$*, B est semblable à une matrice diagonale or* $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ *est semblable à B, par transitivité de la relation de similitude* $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ *est semblable à* $\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix}$ *donc diagonalisable.*

Q8 : On suppose que $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ *est diagonalisable, alors T est scindé à racines simples*

Or B est semblable à $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ *donc d'après la question4 ,* $T(B)$ *est semblable à* $T\left(\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}\right) = 0$

Comme $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ *alors pour tout entier naturel k,* $B^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & 2^kA^k \end{pmatrix}$ *donc* $T(B) = \begin{pmatrix} T(A) & 0 \\ 0 & T(2A) \end{pmatrix} = 0$

On en déduit que $T(A) = 0$*, A possède donc un polynôme annulateur scindé à racines simples donc A est diagonalisable*

BILAN : $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ *est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable*

Q9 : $V = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$*, on a* $\chi_V(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$*, ce polynôme est scindé donc V est trigonalisable.*

Si V est diagonalisable alors son polynôme minimal est SARS donc $min_V(x) = x - 1 \Longrightarrow V = I_2$ donc V n'est pas diagonalisable.

On a $V - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1(V) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, posons $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Or $V\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, posons $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow V\varepsilon_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}VP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q10 : On pose $Z = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ alors $Z^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ et $Z^{-1}\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}Z = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à $C = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$

Q11 : Montrons par récurrence que $C^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$, ce qui est vérifié pour $k = 0$ et $k = 1$

On suppose que $C^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$ alors $C^{k-1} = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & -2(k+1)A^{k+1} \\ 0 & A^{k+1} \end{pmatrix}$

L'égalité est donc bien vérifiée pour tout k

On suppose C diagonalisable alors R son polynôme minimal est scindé à racines simples et $R(C) = 0$

On pose $R(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k x^k \Longrightarrow R(C) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k C^k$ et $R(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k A^k$

De plus $R'(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} kb_k x^{k-1} \Longrightarrow xR'(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} kb_k x^k$ et $AR'(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} kb_k A^k$

Finalement $R(C) = \begin{pmatrix} R(A) & -2AR'(A) \\ 0 & R(A) \end{pmatrix} = 0$

Q12 : On en déduit que $R(A) = 0$ et $AR'(A) = 0$, on en déduit donc que $min_A(x)$ divise R(x) et $xR'(x)$, donc $min_A(x)$ divise le pgcd de ces 2 polynômes

Cependant R est SARS donc R est premier avec R' et le pgcd de R(x) et $xR'(x)$ est celui de R(x) et de x

On en déduit que $min_A(x)$ divise x $\Rightarrow min_A(x) = x$

Or $min_A(A) = 0 \Rightarrow A = 0$

Q13 : $\chi_C(x) = det\begin{pmatrix} xI_n - A & -2A \\ 0 & xI_n - A \end{pmatrix} = \left(\chi_A(x)\right)^2$ d'après la question1.

Si A est trigonalisable alors χ_A est scindé alors χ_C est scindé alors C est trigonalisable

Si C est trigonalisable alors χ_C est scindé alors χ_A est scindé alors A est trigonalisable

Finalement A est trigonalisable si et seulement si C l'est aussi

Q14 : Si on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A(x) = x^2 + 1$, donc A n'est pas trigonalisable, alors $C = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ ne sera pas trigonalisable.