Partie 1 :

Question1 : *on pose* $v_n = \dfrac{\ln n}{n^a} \geq 0$, *si on considère* $\beta = \dfrac{1+a}{2}$ *alors* $n^\beta v_n = \dfrac{\ln n}{n^{(a-1)/2}} \to 0$ *car* $a > 1$

Ainsi $v_n = o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$ *or* $\sum \dfrac{1}{n^\beta}$ *CV car* $\beta > 1$. *D'après les critères de comparaison sur les séries à termes positifs* $\sum \dfrac{\ln n}{n^a}$ *CV*

Question2 : *On pose* $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$, $\forall x > 1$, f_n *est* C^1 *sur* $]1,+\infty[$, $\sum f_n$ *CVS sur* $]1,+\infty[$

$\forall x > 1,\ f_n'(x) = -\dfrac{\ln n}{n^x}$. *On considère toute partie compacte* $[a,b] \subset]1,+\infty[$

Alors $\forall x \in [a,b],\ |f_n'(x)| \leq \dfrac{\ln n}{n^a} \Rightarrow \|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \leq \dfrac{\ln n}{n^a}$.

D'après la question1., $\sum \dfrac{\ln n}{n^a}$ *CV* $\Rightarrow \sum \|f_n'\|_{\infty,[a,b]}$ *CV* $\Rightarrow \sum f_n'$ *CVN donc CVU sur* $[a,b]$

D'après le théorème de dérivation terme à terme de la somme d'une série de fonctions, ζ *est de classe* C^1 *sur toute partie compacte de* $]1,+\infty[$, *donc sur* $]1,+\infty[$

De plus $\forall x > 1,\ \zeta'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\dfrac{\ln n}{n^x} \leq 0 \Rightarrow \zeta$ *est décroissante sur* $]1,+\infty[$.

Question3 : $\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = \dfrac{1}{n}$, *si* $\sum f_n$ *CVU sur* $]1,+\infty[$, *alors d'après le théorème de la double limite la série harmonique* $\sum \dfrac{1}{n}$ *serait convergente. Donc* $\sum f_n$ *ne converge pas uniformément sur* $]1,+\infty[$.

Question4 : $\forall x \geq 2,\ |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow \|f_n\|_{\infty,[2,+\infty[} \leq \dfrac{1}{n^2}$

On en déduit que $\sum \|f_n\|_{\infty,[2,+\infty[}$ *CV* $\Rightarrow \sum f_n$ *CVN donc CVU sur* $[2,+\infty[$

Comme $+\infty \in \overline{[2,+\infty[}$, *le théorème de la double limite affirme*

$\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ *or si* $n \neq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$

Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$

Question5 : *La fonction* $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ *est positive, décroissante et intégrable sur* $]1,+\infty[$ *car* $x > 1$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$

Donc $I(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$, *or* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{1}{1-x}\frac{1}{t^{x-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$

D'où $\dfrac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1} \Rightarrow 1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$.

D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\zeta(x) = 1 \Rightarrow \zeta(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$

Question6 : $\forall (a,b) \in A$ *on pose* $u_{a,b} = \dfrac{1}{(ab)^x} \geq 0$

$\forall a > 0,\ \sum\limits_b u_{a,b}$ *CVA vers* $S(a) = \zeta(x)\dfrac{1}{a^x}$ *or* $\sum S(a)$ *CVA*.

D'après le théorème d'inversion de sommation de Fubini, $\left(u_{a,b}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et on a alors

$$\sum_{(a,b)\in A} u_{a,b} = \sum_{a=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{(ab)^x} = \sum_{a=1}^{+\infty}\frac{1}{a^x}\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{b^x} = \left(\zeta(x)\right)^2.$$

<u>Question7 :</u> *On pose $A_n = \{(a,b)\in A,\ ab=n\}$, alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme une partition de A, la famille $\left(u_{a,b}\right)_{(a,b)\in A}$ étant sommable, le théorème de sommation par paquets permet d'affirmer que*

$$\sum_{(a,b)\in A} u_{a,b} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(a,b)\in A_n} u_{a,b}\text{, cependant si } (a,b)\in A_n \text{, on pose } b=\frac{a}{n} \text{ et } \operatorname{card}(A_n)=d_n$$

Comme $(a,b)\in A_n \Rightarrow u_{a,b}=\dfrac{1}{n^x}$, on obtient donc $\left(\zeta(x)\right)^2 = \displaystyle\sum_{(a,b)\in A} u_{a,b} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x}$

<u>Partie 2 :</u>

<u>Question8 :</u> *on pose $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$*

Si $x\le 0$, $|u_n(x)|\ne o(1)\Rightarrow \sum u_n(x)$ DVG

Si $x>0$, $\varepsilon_n(x)=|u_n(x)|\ge 0$, $(\varepsilon_n(x))$ est décroissante et tend vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées $\sum u_n(x)$ CV.

Finalement $\sum u_n$ CVS sur $]0,+\infty[$ et F est définie sur $]0,+\infty[$.

<u>Question9 :</u> *on pose $\gamma : t\mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$, γ est C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\gamma'(t)=\dfrac{1-x\ln t}{t^{x+1}}$*

Cette fonction est donc croissante sur $\left]0,e^{1/x}\right]$ et décroissante sur $\left[e^{1/x},+\infty\right[$.

La suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)$ est donc décroissante à partir du rang $\left\lfloor e^{1/x}\right\rfloor+1$

<u>Question10 :</u> *Les fonctions u_n sont C^1 sur $]0,+\infty[$, $\sum u_n$ CVS vers F sur $]0,+\infty[$.*

$\forall x>0,\ u_n'(x)=(-1)^n\dfrac{\ln n}{n^x}$, on pose $\varepsilon_n(x)=\dfrac{\ln n}{n^x}$. La suite $(\varepsilon_n(x))$ est positive, décroissante et tend vers 0 à l'infini, d'après le CSSA, $\sum u_n'(x)$ CV et $|R_n(x)|=\left|\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty}u_p'(x)\right|\le\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}$.

On note $K=[a,b]\subset\,]0,+\infty[$, $\forall x\in K,\ |R_n(x)|\le\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}\Rightarrow \|R_n\|_{\infty,K}\le\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}\to 0$

Ainsi $\sum u_n'$ CVU sur K. Le théorème de dérivation termes à termes permet d'affirmer que F est de classe C^1 sur toute partie compacte de $]0,+\infty[$ donc sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0,\ F'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^x}$.

<u>Question11 :</u> *Si $x>1$, $\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ CVA et $\sum\dfrac{1}{n^x}$ CVA $\Rightarrow\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n>0}$ et $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n>0}$ sont sommables. On partitionne alors $\mathbb{N}^*$ avec les entiers naturels non nuls pairs et les entiers naturels impairs, le théorème de sommation par paquets nous donne $F(x)-\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{(2n)^x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^x}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^x}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^x}$*

$$F(x)-\zeta(x)=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^x}=-2^{1-x}\zeta(x)\Rightarrow\forall x>1,\ F(x)=\left(1-2^{1-x}\right)\zeta(x)$$

Question12 : *Sachant que* $\lim_{x\to+\infty}\left(1-2^{1-x}\right)=1$, *les résultats des questions4 et 11 donnent* $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$

Question13 : *Pour* $x>1$, $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ *CVA, donc le produit de Cauchy de* $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ *par elle même et le terme général d'une série absolument convergent.*

Ainsi en posant $\forall n\geq 2,\ c_n(x)=\sum_{k+p=n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}\frac{(-1)^{p-1}}{p^x}=(-1)^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^x(n-k)^x}$, *on obtient immédiatement*

$$\sum_{n=2}^{+\infty}c_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}=(F(x))^2.$$

Question14 : *On a toujours* $\forall x>0,\ \forall n\geq 2,\ c_n(x)=(-1)^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^x(n-k)^x}$ *or* $k^x(n-k)^x>0$ *donc*

$|c_n(x)|=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^x(n-k)^x}$. *Si on considère* $\delta:t\mapsto t(n-t)$ *sur* $[1,n-1]$, *cette fonction prend son maximum*

en $\frac{n}{2}$ *et* $\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ k(n-k)\leq\left(\frac{n}{2}\right)^2\Rightarrow\frac{1}{k^x(n-k)^x}\geq\frac{4^x}{n^{2x}}\Rightarrow|c_n(x)|\geq\frac{4^x}{n^{2x}}(n-1)$

De plus $\frac{n-1}{n^{2x}}\sim\frac{1}{n^{2x-1}}$ *donc si* $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\frac{4^x}{n^{2x}}(n-1)$ *tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini*

Ce qui prouve que $c_n(x)\neq o(1)$ *et que* $\sum c_n(x)$ *diverge grossièrement.*

Question15 : *on a immédiatement* $\frac{1}{X(n-X)}=\frac{1}{nX}+\frac{1}{n(n-X)}$.

$$c_n(1)=(-1)^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}=\frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)=\frac{(-1)^n}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right)$$

Soit $c_n(1)=\frac{2(-1)^n}{n}H_{n-1}$ *car* $H_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}$

Question16 : $\frac{H_n}{n+1}-\frac{H_{n-1}}{n}=\frac{nH_n-(n+1)H_{n-1}}{n(n+1)}=\frac{n\left(H_{n-1}+\frac{1}{n}\right)-(n+1)H_{n-1}}{n(n+1)}=\frac{1-H_{n-1}}{n(n+1)}\leq 0$ *car* $H_{n-1}\geq 1$

Ainsi la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)$ *est décroissante .*

Si on pose $\varepsilon_n=\frac{2H_{n-1}}{n}$, (ε_n) *est positive et décroissante, de plus* $\varepsilon_n\sim\frac{2\ln(n-1)}{n}\to 0$. *D'après le CSSA la série* $\sum c_n(1)$ *est donc convergente.*

Partie 3 :

Question17 : $t\mapsto\frac{1}{t^x}$ *est positive et décroissante sur* $[n,n+1]\Rightarrow\frac{1}{(n+1)^x}\leq\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x}\leq\frac{1}{n^x}$.

Ainsi $0\leq v_n(x)\leq\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}=w_n(x)$.

La suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ *est convergente, le théorème de convergence suite-série nous donne la convergence de la série* $\sum w_n(x)$. *Enfin le critère de comparaison sur les séries à termes positifs assure que* $\sum v_n(x)$ *CV*

Ceci assure la convergence simple de $\sum v_n$ *sur* $[1,2]$. *On notera* $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(1)$

Question18 : *Comme* $x \in]1,2]$, $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$$

Question19 : *Reprenons l'inégalité démontrée à la question17.* $0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} = w_n(x)$

Pour tout entier n, on aura $0 \leq R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p(x) \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} - \frac{1}{(p+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n+1}$

Ainsi $\|R_n\|_{\infty,[1,2]} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \Rightarrow \sum v_n$ *CVU sur* $[1,2]$

D'après le théorème de la double limite $\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \alpha$

Avec la question18, on obtient $\forall x \in V(1^+)$, $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \alpha + o(1) \Rightarrow \zeta(x) = \alpha + \frac{1}{x-1} + o(1)$

Question20 : *D'après la question10.* $F'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

$$1 - 2^{x-1} = (x-1)\ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}(x-1)^2 + o(x-1)^2$$

Or $\zeta(x) = \alpha + \frac{1}{x-1} + o(1) \Rightarrow F(x) = \left((x-1)\ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}(x-1)^2 + o(x-1)^2\right)\left(\alpha + \frac{1}{x-1} + o(1)\right)$

Ce qui donne $F(x) = \ln 2 + (x-1)\left(\alpha \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}\right) + o(x-1)$

Or $F(x) = F(1) + (x-1)F'(1) + o(x-1)$

En vertu de l'unicité du développement limité, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \alpha \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$