

Problème 1 :

Question 1. Si A et B sont semblables alors il existe $P \in GL_n(\square)$ telle que $B = P^{-1}AP$. Or

$$\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM) \text{ donc } \text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^{-1}(AP)) = \text{Tr}((AP)P^{-1}) = \text{Tr}(A).$$

$$\text{De même } \det(B) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \frac{\det(P)}{\det(P)}\det(A) = \det(A)$$

On ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant à droite ou à gauche par une matrice inversible donc $\text{rg}(B) = \text{rg}(A)$

$$\chi_B(x) = \det(xI_n - B) = \det(P^{-1}(xI_n - A)P) = \det(xI_n - A) = \chi_A(x)$$

Deux matrices semblables ont donc la même trace, le même déterminant, le même rang et le même polynôme caractéristique

Question 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = (x-1)(x-2)^2 = \chi_B(x)$, $\text{Tr}(A) = 5 = \text{Tr}(B)$

et $\det(A) = 4 = \det(B)$, A et B sont inversibles donc toutes deux de rang 3

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est de rang } 1 \text{ donc } m(2) = \dim E_2, A \text{ est donc diagonalisable et ainsi semblable à}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est de rang } 2 \text{ donc } m(2) \neq \dim E_2, B \text{ n'est donc pas diagonalisable et ainsi n'est}$$

$$\text{pas semblable à } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Finalement } A \text{ et } B \text{ ne sont pas semblables.}$$

Question 3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A .

On note alors $(e_i)_{i=1,2,3}$ la base canonique de $\square^3$.

On considère alors la nouvelle base $\varepsilon_1 = e_2$, $\varepsilon_2 = e_1$ et $\varepsilon_3 = e_3$

$$\begin{cases} u(\varepsilon_1) = e_1 + e_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ u(\varepsilon_2) = e_2 + 2e_3 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 \\ u(\varepsilon_3) = e_1 = \varepsilon_2 \end{cases} \Rightarrow \text{mat}(u, (\varepsilon_i)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = B$$

A et B représente le même endomorphisme selon deux bases différentes, donc A et B sont semblables.

Question 4. Si A est de rang 1 alors son noyau est de dimension $n-1$. Prenons β une base de ce noyau, il existe alors un vecteur $e \neq 0$ telle que $\beta' = \beta \cup \{e\}$ soit une base de E .

Pour les vecteurs de β , $u(x) = 0$ et $u(e) \neq 0$ car $e \notin \ker u$

Ainsi $\text{mat}(u, \beta') = \left(\begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)$ où $u(e) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Question 5. Si le rang de u est 1 d'après la question 4, il existe une base de E dans laquelle la matrice de

u sera représentée par $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & . & . & \vdots & a_2 \\ \vdots & . & . & . & \vdots \\ \vdots & . & . & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$, or $U^2 = a_n U \neq 0$ car $u \neq 0 \Rightarrow a_n \neq 0$

Le polynôme $P(x) = x^2 - a_n x = x(x - a_n)$ est annulateur de u et est scindé à racines simples, donc u est diagonalisable.

Question 6. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$, notons C_j la colonne j de cette matrice

$C_1 = C_3$ et $C_2 = C_4$ donc $\text{rg}(A) \leq 2$

Si $C_1 = \lambda C_2 \Rightarrow \alpha = \lambda \beta$ et $\beta = \lambda \alpha \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \beta$ ou $\alpha = -\beta$ ce qui est exclus

Finalement A est de rang 2 et $\dim(\ker A) = 2 \Rightarrow 0 \in \text{Sp}(A)$

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2(\alpha + \beta) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2(\alpha + \beta) \in \text{Sp}(A)$

$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2(\alpha - \beta) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2(\alpha - \beta) \in \text{Sp}(A)$

Ainsi $\text{Sp}(A) = \{0, 2(\alpha + \beta), 2(\alpha - \beta)\}$ et $m(0) = 2$, $m(2(\alpha + \beta)) = 1$ et $m(2(\alpha - \beta)) = 1$

La matrice A est donc diagonalisable :

$A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$

Question 7. $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. $\text{mat}(u, \beta) = A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\text{mat}(v, \beta) = B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

On considère $e'_1 = ae_1$ et $e'_2 = e_2$ et $\beta' = (e'_1, e'_2)$

$\begin{cases} u(e'_1) = au(e_1) = \lambda ae_1 = \lambda e'_1 \\ u(e'_2) = u(e_2) = ae_1 + \lambda e_2 = e'_1 + \lambda e'_2 \end{cases} \Rightarrow \text{mat}(u, \beta') = T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

A est donc semblable à T

On considère $e''_1 = be_1$ et $e''_2 = e_2$ et $\beta'' = (e''_1, e''_2)$

$$\begin{cases} v(e''_1) = bv(e_1) = \lambda be_1 = \lambda e''_1 \\ v(e''_2) = v(e_2) = be_1 + \lambda e_2 = e''_1 + \lambda e''_2 \end{cases} \Rightarrow \text{mat}(v, \beta'') = T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

B est donc semblable à T .

Finalement par transitivité de la relation de similitude, A et B sont semblables.

Question 8. $B = P^{-1}AP \Leftrightarrow PB = AP \Leftrightarrow (R + iS)B = A(R + iS) \Leftrightarrow \begin{cases} RB = AR \\ SB = AS \end{cases}$

On considère $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\varphi(z) = \det(R + zS)$. φ est un polynôme de degré inférieur à n , qui est non nul car $\varphi(i) = \det(P) \neq 0$, donc admet un nombre fini de racines.

Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x_0) = \det(R + x_0S) \neq 0$.

On pose $Q = R + x_0S \in GL_n(\mathbb{R})$ et $QB = AQ \Leftrightarrow B = Q^{-1}AQ$.

Donc A et B sont semblables.

Question 9. $\chi_A(x) = x^3 + x$ donc $\text{Sp}(A) = \{0, i, -i\}$. A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car son polynôme

caractéristique est scindé à racines simples. Donc A est semblable dans $M_3(\mathbb{C})$ à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_B(x) = x^3 + x$ donc $\text{Sp}(B) = \{0, i, -i\}$. B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et B est semblable

dans $M_3(\mathbb{C})$ à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$. Donc A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, à coefficients réels, d'après la question 8. A et B sont semblables dans $M_3(\mathbb{R})$.

Question 10. Le polynôme caractéristique est de degré 2

1° cas : χ_A admet deux racines complexes distinctes car son discriminant est non nul, alors A et B sont

diagonalisables et donc semblables à $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. A et B sont donc semblables sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais la

question 8. permet d'avoir la similitude sur $\mathbb{R}$

2° cas : χ_A admet une racine double $\lambda \Rightarrow \chi_A(x) = (x - \lambda)^2$

Si $\min_A(x) = x - \lambda$ alors $A = B = \lambda I_2$ elles sont donc égales donc semblables.

Si $\min_A(x) = (x - \lambda)^2$ alors A et B ne sont plus diagonalisables mais trigonalisables, ainsi A sera semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et B sera elle semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. D'après la question 7. A et B sont semblables.

Finalement, si A et B deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal alors A et B sont semblables.