

Exercice :



1°/ U est une partie fermée et bornée de $\mathbb{C}$ qui est de dimension finie donc U est une partie compacte de $\mathbb{C}$ or $z \mapsto P(z)$ est C^0 et toute fonction C^0 sur une partie compacte est bornée, ce qui assure l'existence du réel :
$$\mu(P) = \sup_{z \in U} |P(z)| \quad (\text{Version 5/2})$$

Autre dem :

$$P(z) = \sum_{h=0}^m \alpha_h z^h \quad \text{donc} \quad |P(z)| \leq \sum_{h=0}^m |\alpha_h| |z|^h$$

$$\text{or } z \in U \text{ donc } |z| = 1 \text{ et } |P(z)| \leq \sum_{h=0}^m |\alpha_h|$$

ce P est bornée sur U . (Version 3/2)

2°/ $\forall P \in \mathbb{C}[X], \mu(P) \in \mathbb{R}^+$

si $\mu(P) = 0$ alors $\forall z \in U, P(z) = 0$, donc P admet une infinité de racines $\Rightarrow P = 0$

$$\mu(\lambda P) = \sup_{z \in U} |\lambda P(z)| = |\lambda| \sup_{z \in U} |P(z)| \quad (\text{on démontre que } \|\cdot\|_\infty)$$

$$\forall z \in U, |P(z) + Q(z)| \leq \mu(P) + \mu(Q)$$

$$\text{donc } \mu(P+Q) \leq \mu(P) + \mu(Q)$$

μ définit une norme sur $\mathbb{C}[X]$

3°/ $T_m \subset \mathbb{C}_m[X]$

Or $\mathbb{C}_m[X]$ est de dimension finie ($m+1$ dans ce cas) donc N et μ sont équivalentes sur $\mathbb{C}_m[X]$

$$\exists \alpha > 0 \text{ tq } \forall P \in \mathbb{C}_m[X], \alpha N(P) \leq \mu(P)$$

(admis 3/2)

$$\text{or } \forall P \in T_m, N(P) = 1 + \sum_{h=0}^{m-1} |\alpha_h| \geq 1$$

$$\underline{\text{c}} \quad \forall P \in T_m, \mu(P) \geq \alpha.$$

ce qui prouve bien l'existence de $\gamma_m = \inf_{P \in T_m} \mu(P)$

$$\text{et que } \boxed{\gamma_m \geq \alpha > 0}$$

$$4^\circ / |z - a| = |e^{i\theta} - re^{i\theta_0}| \quad (\text{car } z \in U)$$

$$|z - a| \leq 1 + r \quad \text{car } |e^{i\theta}| = |e^{i\theta_0}| = 1$$

$$\underline{\text{c}} \quad \mu(z - a) \leq 1 + r.$$

$$\text{or } -e^{i\theta_0} \in U \text{ donc } |e^{i\theta_0} - re^{i\theta_0}| = |-1 - r| = 1 + r$$

$$\underline{\text{c}} \quad 1 + r \leq \mu(z - a)$$

$$\underline{\text{Finalement}} \quad \boxed{\mu(z - a) = 1 + r}$$

$$\gamma_1 = \inf_{P \in T_1} \mu(P) = \inf_{a \in \mathbb{C}} (\mu(z - a)) = \inf_{r \in \mathbb{R}^+} (1 + r) = 1$$

$$\underline{\text{Donc}} \quad \boxed{\gamma_1 = 1}$$

$$5^\circ / X^m \in T_m \text{ or } \mu(X^m) = 1$$

Par définition de la borne inférieure

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \boxed{\gamma_m \leq \mu(X^m) = 1}$$

$$6^\circ / \text{Soit } P \in T_p \text{ alors } \forall z \in U, |P(z)| \leq \mu(P)$$

on prendra $P \neq 0$

Soit $Q \in \mathcal{T}_q$ alors $\forall z \in U, |Q(z)| \leq \mu(Q)$
(on prendra aussi $Q \neq 0$)

$$|P(z) \times Q(z)| \leq \mu(P) \times \mu(Q) \quad \forall z \in U$$

$$\text{donc } \mu(P \times Q) \leq \mu(P) \times \mu(Q)$$

(car c'est la + petit des majorants)

$$\text{or } P \times Q \in \mathcal{T}_{p+q} \text{ donc } \gamma_{p+q} \leq \mu(P \times Q)$$

$$\text{c'est-à-dire } \gamma_{p+q} \leq \mu(P) \times \mu(Q)$$

$$\text{Soit } \forall Q \in \mathcal{T}_q \quad \frac{\gamma_{p+q}}{\mu(P)} \leq \mu(Q)$$

or γ_q est la + grand des mineurs de $\mu(Q)$

$$\text{Donc } \frac{\gamma_{p+q}}{\mu(P)} \leq \gamma_q \text{ donc } \frac{\gamma_{p+q}}{\gamma_q} \leq \mu(P)$$

or γ_p est la plus grand des mineurs de $\mu(P)$

$$\text{Donc } \frac{\gamma_{p+q}}{\gamma_q} \leq \gamma_p \text{ ou encore } \boxed{\gamma_{p+q} \leq \gamma_p \gamma_q}$$

$$\forall n, \gamma_{n+1} \leq \gamma_n \gamma_1 \text{ or } \gamma_1 = 1$$

(γ_n) est décroissant et minoré par 0

$$\text{Donc } \boxed{(\gamma_n) \text{ est convergent}}$$