Corrigé du DNS3

Exercice n°1 : $f_0(x) = \text{sh}(x)$ et $f_{n+1}(x) = \int_0^x -2tf_n(t)dt, \forall n \geq 0$

1. $f_1(x) = \int_0^x -2t\text{sh}(t)dt = -2x\text{ch}x + \int_0^x 2\text{ch}(t)dt = -2x\text{ch}x + 2\text{sh}x$

Par un calcul similaire on obtient $f_2(x) = 12\text{sh}x - 12x\text{ch}x + 4x^2\text{sh}x$

2. On démontre ce résultat par récurrence, à partir du rang 2

On vérifie en effet que $2(3)f_1(x) + 4x^2f_0(x) = 12\text{sh}x - 12x\text{ch}x + 4x^2\text{sh}x = f_2(x)$

On suppose que $f_n(x) = 2(2n-1)f_{n-1}(x) + 4x^2f_{n-2}(x)$

On considère alors $g(x) = f_{n+1}(x) - 2(2n+1)f_n(x) - 4x^2f_{n-1}(x)$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on aura

$$\begin{aligned} g'(x) &= f_{n+1}'(x) - 2(2n+1)f_n'(x) - 4x^2f_{n-1}'(x) - 8xf_{n-1}(x) \\ &= -2xf_n'(x) + 4(2n+1)xf_{n-1}'(x) + 8x^3f_{n-2}'(x) - 8xf_{n-1}(x) \\ &= -2x[f_n'(x) - 2(2n-1)f_{n-1}'(x) - 4x^2f_{n-2}'(x)] \\ &= 0 \text{ par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

g est donc une fonction constante or $g(0) = 0$ car toutes les fonctions f_k sont nulles en 0

On a donc bien $f_{n+1}(x) = 2(2n+1)f_n(x) + 4x^2f_{n-1}(x)$

Finalement $\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbf{R} : f_n(x) = 2(2n-1)f_{n-1}(x) + 4x^2f_{n-2}(x)$

3. On effectue à nouveau un raisonnement par récurrence afin l'établir l'existence de tels polynômes.

On a $f_0(x) = 1\text{sh}x + 0\text{ch}x$ et $f_1(x) = 2\text{sh}x - 2x\text{ch}x$

On peut introduire les polynômes $Q_0(x) = 1, P_0(x) = 0, Q_1(x) = 2$ et $P_2(x) = 2x$

On suppose maintenant l'existence de polynômes $Q_{n-2}, P_{n-2}, Q_{n-1}$ et P_{n-1} tels que

$$\begin{aligned} f_{n-2}(x) &= Q_{n-2}(x)\text{sh}(x) - P_{n-2}(x)\text{ch}(x) \\ f_{n-1}(x) &= Q_{n-1}(x)\text{sh}(x) - P_{n-1}(x)\text{ch}(x) \end{aligned}$$

Alors en utilisant l'égalité démontrée à la question 2 on obtient

$$f_n(x) = [2n(2n-1)Q_{n-1}(x) + 4x^2Q_{n-2}(x)]\text{sh}(x) - [2n(2n-1)P_{n-1}(x) + 4x^2P_{n-2}(x)]\text{ch}(x)$$

On peut donc identifier et poser ainsi

$$P_n(x) = [2n(2n-1)P_{n-1}(x) + 4x^2P_{n-2}(x)] \text{ et } Q_n(x) = [2n(2n-1)Q_{n-1}(x) + 4x^2Q_{n-2}(x)]$$

On vérifie bien sur que P_n et Q_n sont bien des polynômes, ce qui assure donc l'existence des familles de polynômes telles que $Q_n(x)\text{sh}(x) - P_n(x)\text{ch}(x) = f_n(x)$

4. En effectuant à nouveau des raisonnements par récurrence que vous me pardonneriez de ne pas totalement rédiger, on montre grâce aux formules établies à la question précédente que :

Les coefficients des polynômes P_n et Q_n sont des entiers naturels.

La fonction $x \mapsto P_n(x)$ est impaire et que $x \mapsto Q_n(x)$ est paire

5. Comme $x \mapsto Q_n(x)$ est paire, $Q_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p}$. Or il s'agit d'une somme de termes monômes d'exposant pairs multipliés par des coefficients entiers naturels, donc $\forall x \in \mathbb{R}, Q_n(x) \geq a_0 = Q_n(0)$

Montrons que $Q_n(0) = \frac{(2n)!}{n!}$ par récurrence sur n . Si $n = 0, Q_0(0) = 1 = \frac{0!}{0!}$

On suppose que $Q_{n-1}(0) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}$, alors en utilisant la relation obtenue en question 3.

$$\text{on obtient } Q_n(0) = 2(2n-1)Q_{n-1}(0) = \frac{2(2n-1)(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2(2n-1)!}{n!} n = \frac{(2n)!}{n!}$$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}: Q_n(x) \geq \frac{(2n)!}{n!}$

6. On procède à nouveau par récurrence. Si $n = 0, |f_0(x)| = \text{sh}x \leq \frac{x^0}{0!} \text{sh}x, \forall x \geq 0$

On suppose que $\forall x \geq 0, |f_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{n!} \text{sh}x$, alors $|f_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x 2t f_n(t) dt \right| \leq 2 \int_0^x t |f_n(t)| dt$

En utilisant l'hypothèse de récurrence on aura $|f_{n+1}(x)| \leq 2 \int_0^x t \frac{t^{2n}}{n!} \text{sht} dt$

Or la fonction $t \mapsto \text{sht}$ est croissante sur $[0, x]$, donc $\text{sht} \leq \text{sh}x$

$$\text{donc } |f_{n+1}(x)| \leq \frac{2\text{sh}x}{n!} \int_0^x t^{2n+1} dt = \frac{2\text{sh}x}{n!} \frac{1}{2n+2} = \frac{\text{sh}x}{(n+1)!}$$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+: |f_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{n!} \text{sh}(x)$

7. D'après la question 5. on a $\forall x \in \mathbb{R}^+, Q_n(x) > 0$

$$\text{Or } \left| \text{th}x - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| = \left| \frac{Q_n(x)\text{sh}x - P_n(x)\text{ch}x}{Q_n(x)\text{ch}x} \right| = \frac{|f_n(x)|}{Q_n(x)\text{ch}x}$$

Donc en utilisant l'inégalité de la question 6.

$$\left| \text{th}x - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \leq \frac{x^{2n}}{n!} \text{th}x \frac{1}{Q_n(x)} \text{ or } \text{th}x \leq 1 \text{ et } Q_n(x) \geq \frac{(2n)!}{n!} \Rightarrow \frac{1}{Q_n(x)} \leq \frac{n!}{(2n)!}$$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+: \left| \text{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

8. la fonction $x \mapsto \text{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ est impaire on peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

Soit $I = [a, b] \cap \mathbb{R}^+ = [c, d]$, d'après la question 7., pour tout $x \in I, \left| \text{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \leq \frac{d^{2n}}{(2n)!}$

$$\text{Donc } \left\| \text{th} - \frac{P_n}{Q_n} \right\|_{\infty} \leq \frac{d^{2n}}{(2n)!} \rightarrow 0$$

Ce qui montre que la suite $\left(\frac{P_n}{Q_n} \right)$ converge vers th sur $[a, b]$ au sens de $\| \cdot \|_{\infty}$

Exercice n°2 :

$$1.: \gamma(x) = \int_a^b |x-t| dt = \int_a^x (x-t) dt + \int_x^b (t-x) dt = x^2 - (a+b)x + \frac{a^2+b^2}{2}$$

$\gamma(x)$ est un trinôme du second degré convexe, donc γ admet sa borne inférieure en $x = \frac{a+b}{2}$ et sa borne

$$\text{supérieure en } a \text{ ou en } b, \text{ or } \gamma\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{4} \text{ et } \gamma(a) = \gamma(b) = \frac{(b-a)^2}{2}$$

Finalemment $\|\gamma\| = \frac{(b-a)^2}{2}$

2. $\forall x \in [a, b], P_1(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x-t) dt = x - \frac{1}{2}(b+a)$

De même on trouve $P_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{a+b}{2}x + \frac{a^2 + 4ab + b^2}{12}$

3. la fonction f est continue sur $[a, b]$, elle admet donc des primitives

Je pose $\forall x \in [a, b], F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

Alors $L(f)(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b (F(x) - F(t)) dt = F(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b F(t) dt$

On reconnaît la valeur moyenne de F sur $[a, b]$, $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b F(t) dt$ qui est une constante

$L(f)(x) = F(x) - \mu \Rightarrow L(f)$ est C^1 sur $[a, b]$, et $L(f)' = F' = f$

$L(f)$ est bien une primitive de f

Et de plus $\int_a^b L(f)(x) dx = \int_a^b F(x) dx - \int_a^b \mu dx = \int_a^b F(x) dx - (b-a)\mu = 0$

4. Par linéarité de l'intégrale $L(\lambda f + g)(x) = \lambda L(f)(x) + L(g)(x)$, L est linéaire

De plus $\forall f \in E, L(f)$ est C^1 donc $C^0 \Rightarrow L(f) \in E$. L est donc bien un endomorphisme de E

On a alors : $\forall x \in [a, b], |L(f)(x)| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |\int_t^x f(t) dt| dx$

Or si $x \geq t$ alors $|\int_t^x f(t) dt| \leq \int_t^x |f(t)| dt \leq (x-t)\|f\|$

Par contre si $x \leq t$ alors $|\int_t^x f(t) dt| \leq \int_x^t |f(t)| dt \leq (t-x)\|f\|$

Finalemment $|\int_t^x f(t) dt| \leq |x-t|\|f\| \Rightarrow \forall x \in [a, b], |L(f)(x)| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |x-t|\|f\| dx = \frac{1}{b-a} \gamma(x)\|f\|$

Donc $\forall x \in [a, b], |L(f)(x)| \leq \frac{1}{b-a} \|\gamma\| \|f\| = \frac{b-a}{2} \|f\| \Rightarrow \|L(f)\| \leq \frac{b-a}{2} \|f\|$

Cette dernière inégalité prouve la continuité de L sur $(E, \|\cdot\|)$

Si $\|f\| = 1$ alors $\|L(f)\| \leq \frac{b-a}{2} \Rightarrow \|L\| \leq \frac{b-a}{2}$

Prenons la fonction $P_0 \Rightarrow \|P_0\| = 1$ et $L(P_0) = P_1 \Rightarrow \|L(P_0)\| = \frac{b-a}{2} \leq \|L\|$

Finalemment $\|L\| = \frac{b-a}{2}$

Exercice n°3 :

1. Si $x \leq y$, $\inf(x, y) = x$ et $\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-y+x) = x$

Et si $x \geq y$, $\inf(x, y) = y$ et $\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-x+y) = y$

Donc $\inf(x, y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$

$$2. \quad |\inf(x, y) - \inf(z, y)| = \frac{1}{2} |x + y - |x - y| - y - z + |z - y|| = \frac{1}{2} |x - z - |x - y| + |z - y||$$

$$|\inf(x, y) - \inf(z, y)| \leq \frac{1}{2} |x - z| + \frac{1}{2} ||x - y| - |z - y||$$

$$\text{or } ||a| - |b|| \leq |a - b| \text{ donc } |\inf(x, y) - \inf(z, y)| \leq \frac{1}{2} |x - z| + \frac{1}{2} |x - y + y - z| = |x - z|$$

3. Soit $(x, y) \in [0, 1]^2$

$$|u(f)(x) - u(f)(y)| = \left| \int_0^1 (\inf(t, g(x)) - \inf(t, g(y))) f(t) dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |\inf(t, g(x)) - \inf(t, g(y))| |f(t)| dt$$

$$\leq |g(x) - g(y)| \cdot \|f\|_1$$

Or g est continue sur $[0, 1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mu$ tel que si $|x - y| < \mu$ alors $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_1}$

(je suppose dans cette démonstration que f n'est pas la fonction nulle, si c'est le cas la continuité de $u(f)$ est clairement établie)

Ainsi $|u(f)(y) - u(f)(x)| < \varepsilon$, ce qui assure bien la continuité de $u(f)$ sur $[0, 1]$

4. Soit $x \in [0, 1]$, $u(f)(x) = \int_0^{g(x)} tf(t) dt + g(x) \int_{g(x)}^1 f(t) dt$

Les fonctions $t \rightarrow tf(t)$ et $t \rightarrow f(t)$ sont continues sur $[0, 1]$ et la fonction g est de classe C^1 , donc $u(f)$ est bien C^1 sur $[0, 1]$. Et pour tout x , on a :

$$(u(f))'(x) = g(x)f(g(x)) \cdot g'(x) - g'(x) \int_1^{g(x)} f(t) dt - g(x) \cdot f(g(x))g'(x) = -g'(x) \int_1^{g(x)} f(t) dt$$

5. Par linéarité de l'intégrale, on peut observer que $\forall x \in [0, 1]$, $u(\lambda f + g)(x) = \lambda u(f)(x) + u(g)(x)$
 u est bien une application linéaire, et on peut caractériser ainsi son injection à l'aide de son noyau

$$f \in \ker u \Leftrightarrow \forall x \in [0, 1], u(f)(x) = 0, \text{ comme } u(f) \text{ est dérivable, on a donc : } u(f)'(x) = 0 \text{ soit}$$

$$g'(x) \int_1^{g(x)} f(t) dt = 0, \text{ or } g'(x) \neq 0 \text{ car } g \text{ est strictement croissante, on obtient } \forall x \in [0, 1], \int_1^{g(x)} f(t) dt = 0$$

On peut à nouveau dériver cette expression et on a : $f(g(x)) \cdot g'(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$ (*)

Comme g réalise une bijection de $[0, 1]$ dans lui-même, pour tout y dans $[0, 1]$, il existe un unique x de $[0, 1]$ tel que $y = g(x)$

Ainsi $\forall y \in [0, 1], f(y) = f(g(x)) = 0$ (d'après (*))

Finalement le noyau de u est réduit à la fonction nulle, ce qui assure l'injectivité de u

6. D'après la question 5. , si f est un élément de E alors $u(f)$ est dérivable, or tout élément de E n'est pas forcément dérivable sur $[0,1]$ (par exemple $x \rightarrow \sqrt{x}$) donc u n'est pas surjective

$$7. \forall (x,t) \in [0,1]^2, \inf(t, g(x)) \leq t. \text{ Donc } |u(f)(x)| \leq \int_0^1 tf(t) dt \Rightarrow \|u(f)\|_\infty \leq \int_0^1 tf(t) dt$$

$$\text{Or } |u(f)(1)| = \int_0^1 tf(t) dt \leq \|u(f)\|_\infty. \text{ Finalement } f \in E^+, \|u(f)\|_\infty = \int_0^1 tf(t) dt$$

$$8. \text{ Soit } x \in [0,1]. |u(h)(x)| \leq \int_0^1 \inf(t, g(x)) |h(t)| dt = u(|h|)(x) \leq \|u(|h|)\|_\infty \text{ or } |h| \in E^+$$

$$\text{donc } |u(h)(x)| \leq \int_0^1 t |h(t)| dt \leq \|h\|_\infty \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \|h\|_\infty, \text{ soit au final } \|u(h)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|h\|_\infty$$

9. Cette inégalité prouve que l'application linéaire u est continue sur E