DNS1 première période pour le lundi 23/09/24

Premier Problème

On considère pour tout entier $n \geq 1$*, l'entier* $\Delta_n = ppcm(1,2,\ldots,n)$

Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *tels que* $1 \leq b \leq a$ *on pose* $I(b,a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,\mathrm{d}x$

1.a. : Exprimer $I(1,a)$ *en fonction de a*

1.b. : Pour $b < a$ *exprimer* $I(b+1,a)$ *en fonction de* a, b *et* $I(b,a)$

1.c. : En déduire que $I(b,a) = \dfrac{1}{b\dbinom{a}{b}}$

2. On considère un réel $y \in [0,1[$

2.a. : Montrer que $\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k,a)$

2.b. : Montrer également que $\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1}$

2.c. : En déduire ainsi que l'on retrouve le résultat de la question 1.c.

3.a. : Montrer que $I(b,a) = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \dfrac{1}{k+b}$

3.b. : En déduire que $I(b,a)\Delta_a \in \mathbb{N}$

3.c. : Prouver que l'entier $b\dbinom{a}{b}$ *divise l'entier* Δ_a

4. Soit un entier $n \geq 1$

4.a. : Montrer que $n\dbinom{2n}{n}$ *et* $(2n+1)\dbinom{2n}{n}$ *divisent l'entier* Δ_{2n+1}

4.b. : En déduire que $n(2n+1)\dbinom{2n}{n}$ *divise l'entier* Δ_{2n+1}

5.a. : En étudiant la suite $(u_k)_{k \in \{0,\ldots,2n\}}$ *définie par* $u_k = \dbinom{2n}{k}$*, montrer que pour tout* $k \in [\![0,2n]\!]$*,*

$\dbinom{2n}{k} \leq \dbinom{2n}{n}$

5.b. : En déduire que $(2n+1)\dbinom{2n}{n} \geq 4^n$ *puis que* $\Delta_{2n+1} \geq n4^n$

6. : *Montrer que si* $n \geq 9$ *alors* $\Delta_n \geq 2^n$, *on admettra que l'inégalité est encore vraie pour* $n = 7$ *et* $n = 8$

7. *Etant donnés un entier* $n \geq 1$ *et p un nombre premier, on appelle valuation p-adique de n l'entier noté* $v_p(n)$ *égal à l'exposant de p dans la décomposition en facteur premier de n ; par exemple si on prend* $n = 40 = 2^3 \times 5$ *alors* $v_2(40) = 3$ *et* $v_5(40) = 1$. *On admettra que* $v_p(\Delta_n) = \max(v_p(1), v_p(2), ..., v_p(n))$

On note également $\pi(n)$ *le nombre de nombres premiers compris entre 1 et n, par exemple* $\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$ *et* $\pi(8) = 4$. *Montrer que* $\Delta_n \leq n^{\pi(n)}$ *puis que pour* $n \geq 7$, $\pi(n) \geq \ln 2 \dfrac{n}{\ln n}$

(ceci s'appelle la minoration de Tchebychev)

Pour information on a également $n \geq 7$, $\pi(n) \leq e \dfrac{n}{\ln n}$, *mais vous ne démontrerez pas ce résultat*

<u>Second Problème</u>

On note $\mathbb{Z}$ *l'ensemble des entiers relatifs,* $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, x \wedge y$ *désigne le PGCD de x et y*

$\mathbb{Z}^2$ *est muni d'une loi additive* $\forall \big((x,y),(x',y')\big) \in (\mathbb{Z}^2)^2, (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$, *ainsi* $(\mathbb{Z}^2,+)$ *est un groupe abélien*

On note $A = (1,0)$ *et* $B = (0,1)$

1. *Soit* $X = (x,y) \in \mathbb{Z}^2$, *montrer que le sous groupe engendré par X est* $\{(nx, ny)\ tel\ que\ n \in \mathbb{Z}\}$
2. *Prouver que* $(\mathbb{Z}^2,+)$ *n'est pas monogène*
3. *Montrer qu'un morphisme de* $(\mathbb{Z},+)$ *dans* $(\mathbb{Z}^2,+)$ *ne peut pas être surjectif*
4. *Soit g un morphisme de* $(\mathbb{Z}^2,+)$ *dans* $(\mathbb{Z},+)$, *montrer qu'il existe deux entiers relatifs a et b tels que pour tout* $(x,y) \in \mathbb{Z}^2, g(x,y) = ax + by$
5. *Un morphisme de* $(\mathbb{Z}^2,+)$ *dans* $(\mathbb{Z},+)$, *peut-il être injectif ?*
6. *Si g est un morphisme de* $(\mathbb{Z}^2,+)$ *dans* $(\mathbb{Z},+)$, *qui est* $\operatorname{Im} g$ *en fonction de* (a,b) *?*
7. *Soient* $U = (a,b) \in \mathbb{Z}^2$ *et* $V = (c,d) \in \mathbb{Z}^2$, *montrer que si* (U,V) *engendrent* $\mathbb{Z}^2$ *alors on a* $a \wedge c = 1$, $b \wedge d = 1$ *et* $|ad - bc| = 1$
8. *Réciproquement, soient* $U = (a,b) \in \mathbb{Z}^2$ *et* $V = (c,d) \in \mathbb{Z}^2$ *tels que* $|ad - bc| = 1$, *montrer que* (U,V) *engendrent* $\mathbb{Z}^2$

Soit $(H,+)$ *un sous groupe de* $(\mathbb{Z}^2,+)$

On pose $K = \{x \in \mathbb{Z}, tel\ \ que\ \ \exists y \in \mathbb{Z}\ \ tel\ \ que (x,y) \in H\}$ *et* $L = \{(0,y) \in H\}$

9. *Montrer qu'il existe* $a \in \mathbb{Z}$ *tel que* $K = a\mathbb{Z}$
10. *Montrer que* $(L,+)$ *est un sous groupe monogène de* $(\mathbb{Z}^2,+)$, *on notera* $(0,c)$ *l'un de ses générateurs*
11. *On pose* $U = (a,b)$ *et* $V = (0,c)$, *montrer que* (U,V) *engendre H*
12. *Montrer que* $(H,+)$ *est monogène si et seulement si* $ac = 0$