Problème n°1 :

Dans ce problème n est un entier supérieur ou égal à 2
 E désigne un espace vectoriel sur le corps des réels de dimension n

$\ell(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E

Si $f \in \ell(E)$, $Sp(f)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de f

On notera : $R(f) = \{h \in \ell(E) \text{ tel que } h^2 = f\}$

On notera également $M_n(\mathbb{R})$ l'espace de matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

Partie 1 :

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable, préciser une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de vecteurs propres et donner la matrice D de f dans cette base
2. Calculer A^m et exprimer le résultat sous forme matricielle en fonction de m
3. Exprimer toutes les matrices M de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec D
4. Montrer que si $H \in M_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent
5. En déduire toutes les matrices $H \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer les matrices dans la base canonique de tous les endomorphismes $h \in R(f)$

Partie 2 :

Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Exprimer J^m pour tout entier naturel $m \neq 0$, en déduire que $f^m = Id + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est elle encore valable si $m = 0$?
7. Montrer qu'il existe λ et μ vérifiant $\lambda < \mu$ et $Sp(f) = \{\lambda, \mu\}$
8. Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes tels que pour tout entier m on ait $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$
9. Montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants
10. Après avoir calculer p^2, q^2, poq et qop , trouver tous les endomorphismes h combinaison linéaire de p et q qui appartiennent à $R(f)$
11. Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres, on notera D la matrice de f dans cette base. Ecrire les matrices de p et q dans cette base

12. Déterminer une matrice K de $M_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrices H de $M_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $H^2 = D$
13. En déduire un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$, non combinaison linéaire de p et q qui appartient à $R(f)$
14. Montrer que tous les éléments de $R(f)$ sont diagonalisables

Problème n°2 :

Soit n un entier supérieur à 2.

$M_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On s'intéresse dans ce problème à la réduction de matrices par blocs du type $\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ non tous nuls.

Questions préliminaires :

1. Si A, B, C sont des matrices de $M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$.
2. Soit A une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{R})$, dont $(\lambda_i)_{i=1..p}$ sont ses valeurs propres, donner son polynôme minimal.
3. Soient $(\mu_i)_{i=1..r}$ r réels 2 à 2 distincts et $P(x) = \prod_{i=1}^r (x - \mu_i)$. Si P est annulateur de A , montrer que A est diagonalisable. Que dire de son spectre ?
4. Montrer que si A et B sont semblables alors pour tout polynôme T , les matrices $T(A)$ et $T(B)$ sont semblables

Un premier exemple :

5. On pose $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que U est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ et donner une matrice P inversible $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1}UP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda < \mu$. On précisera P^{-1} .
6. On pose $Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Justifier que Q est inversible.
Puis montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$.
7. On suppose que la matrice A est diagonalisable, que peut-on dire de la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$?
8. On suppose maintenant que $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable, on note T son polynôme minimal, que vaut $T(A)$? Que peut-on en déduire pour A ?

Un second exemple :

9. On pose $V = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, montrer que V est trigonalisable et non diagonalisable sur $M_2(\mathbb{R})$, et déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}VP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On précisera P^{-1} .

10. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice

$$C = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

11. On suppose que la matrice C est diagonalisable dans $M_{2n}(\mathbb{R})$ et R son polynôme minimal, calculer la matrice $\begin{pmatrix} R(A) & -2AR'(A) \\ 0 & R(A) \end{pmatrix}$ où R' est la dérivée de R .

12. En déduire le polynôme minimal de A . Puis déterminer cette matrice A

13. Exprimer le polynôme caractéristique de C en fonction de celui de A . En déduire que A est trigonalisable si et seulement si C l'est aussi.

14. Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $C = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ ne soit pas trigonalisable.