DNS n°3 : 3 ième période pour le lundi 25/11/24

Exercice n°1 :

On définit une suite (f_n) telle que f_n soit une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f_0(x) = \text{sh}(x) \text{ et } f_{n+1}(x) = \int_0^x -2tf_n(t)dt, \forall n \geq 0$$

1. Expliciter f_1 et f_2
2. Montrer que $\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}: f_n(x) = 2(2n-1)f_{n-1}(x) + 4x^2f_{n-2}(x)$
3. Montrer l'existence de deux suites de polynômes (P_n) et (Q_n) telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}: Q_n(x)\text{sh}(x) - P_n(x)\text{ch}(x) = f_n(x)$$
4. Montrer que les coefficients des polynômes P_n et Q_n sont des entiers naturels et préciser la parité des fonctions $x \mapsto P_n(x)$ et $x \mapsto Q_n(x)$
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}: Q_n(x) \geq Q_n(0)$ et que $Q_n(0) = \frac{(2n)!}{n!}$
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+: |f_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{n!} \text{sh}(x)$
7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+: \left| \text{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
8. Etablir la convergence de la suite $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)$ sur $[a, b]$ au sens de la norme infinie : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Exercice n°2 :

Soit $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

$\forall f \in E$, on note $L(f)$ la fonction définie sur $[a, b]$ par $L(f)(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[\int_t^x f(u) du \right] dt$

L est l'application linéaire qui à f associe $L(f)$

On définit par récurrence la composée $L^n = L \circ L^{n-1}$

On définit la suite de polynômes (P_n) telle que $P_0(t) = 1$ et $P_n = L^n(P_0)$

1. Soit $\gamma: x \mapsto \int_a^b |x-t| dt$ pour $x \in [a, b]$, déterminer $\|\gamma\|$
2. Calculer $P_1(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, puis $P_2(x)$
3. Montrer que $L(f)$ est la primitive de f qui vérifie $\int_a^b L(f)(t) dt = 0$
4. Montrer que L est continue et calculer sa norme

Exercice n°3 :

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit g une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ strictement croissante sur $[0, 1]$ qui vérifie $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $\forall x \in]0, 1[$, $g(x) \neq x$

1. Montrer que pour deux réels x et y on a $\inf(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

2. Montrer que $|\inf(x, y) - \inf(z, y)| \leq |x - z|$

Pour tout $f \in E$, on définit $u(f)$ par $u(f)(x) = \int_0^1 \inf(t, g(x)) f(t) dt$

3. Montrer que $u(f)$ est une fonction continue sur $[0, 1]$

4. Montrer que $u(f)$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et établir sa dérivée

5. Montrer que u est linéaire et injective

6. L'application u est-elle surjective ?

On note E^+ les fonctions de E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

7. Montrer que si $f \in E^+$, $\|u(f)\|_\infty = \int_0^1 tf(t) dt$

8. En déduire que si $h \in E$, $\|u(h)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|h\|_\infty$

9. Que peut-on en déduire pour l'application u sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$?