DNS n°4 : pour le lundi 16/12/24

Exercice n°1 :

On considère le problème différentiel linéaire d'ordre 2 suivant, noté (S) (E)

$$\begin{cases} \forall x > 0, x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - 2y(x) = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

1. *Déterminer* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $x \mapsto \alpha x + \beta$ *soit solution de (S)*
2. *Résoudre (S)*

Exercice n°2 :

Soit $x \in]0, +\infty[$

1. *Justifier la convergence des intégrales suivantes :* $g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *et* $h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$
2. *Montrer que g et h sont de classe* C^1 *sur* $]0, +\infty[$
3. *Résoudre l'équation différentielle (E)* $y''(x) + y(x) = \frac{1}{x}$ *sur* $]0, +\infty[$, *on exprimera la solution générale de (E) à l'aide des fonctions g et h*
4. *Quelle est la solution de (E) qui vérifie* $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$ *?*

Exercice n°3 :

On donne comme résultat $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Pour tout entier naturel n, on pose $f_n(x) = x^n \ln x$ *et* $g_n(x) = \frac{x^n \ln x}{1+x}$

1. *Montrer que* f_n *est intégrable sur* $]0,1]$. *On pose alors* $u_n = \int_0^1 u_n(t)\mathrm{d}t$
2. *Montrer que la série de terme général* u_n *est convergente et préciser sa somme*
3. *Montrer que* g_n *est intégrable sur* $]0,1]$. *On pose alors* $v_n = \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t$.
4. *On pose* $w_n = (-1)^{n-1} v_n$. *Montrer que la série de terme général* w_n *est convergente*
5. *Prouver que* $w_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

Exercice n°4 :

On considère A une partie de $\mathbb{N}$. *On pose la suite* (a_n) *définie par* $a_n = 1$ *si* $n \in A$ *et* $a_n = 0$ *sinon*

On fixe une réel $x > 0$

1. *Montrer que la série de terme général* $a_n e^{-nx}$ *est convergente. On pose alors la fonction* $f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$
2. *On définit* $A(n) = \{p \in A, tel\ que\ p \leq n\}$, *montrer que pour tout x*> 0, *on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} Card(A(n)) e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-e^{-x}}$