1. *On considère la fonction g définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(t) = \frac{\sin t}{t}$ *si* $t \neq 0$ *et* $g(0) = 1$. *Montrer que g est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$
2. *Prouver la convergence de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. *On admettra que* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$
3. *Déterminer pour* $j \in \mathbb{N}^*$, *la valeur de* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$
4. *Donner un développement limité à l'ordre 4 de* $t \mapsto \ln\big(g(t)\big)$
5. *On admet que* $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. *Donner un équivalent de* $\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt$.
6. *Soit n un entier supérieur à 2, justifier la convergence de* $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt$
7. *Quelle est la valeur de* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$
8. *Pour tout entier n non nul et tout réel* $t > 0$, $h_n(t) = \sin^n t$
   a. *Pour* $k \in [\![0, n-1]\!]$, *justifier l'existence d'un réel K tel que* $\forall t > 0, \left|h_n^{(k)}(t)\right| \leq K$
   b. *Donner le développement limité à l'ordre n en 0 de* h_n
   c. *Montrer que* $\lim\limits_{t \to 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$
   d. *Pour* $k \in [\![0, n-2]\!]$, *montrer que* $t \mapsto \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ *est intégrable sur* $]0, +\infty[$.
   e. *Etablir la convergence de* $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$
   f. *Montrer que* $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$
9. *Montrer que* $h_{2n}(t) = (\sin t)^{2n} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}$
10. *Montrer que* $h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt)$
11. *En déduire que* $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$
12. *Montrer que lorsque n tend vers l'infini* $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
13. *Etudier les variations de g sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
14. *En utilisant un équivalent de* $\ln\left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)$ *où* $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, *montrer que* $\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
15. *Justifier l'existence de* $a > 0$ *tel que* $\forall u \in [0, a], |e^{-u} - 1| \leq 2u$
16. *Justifier l'existence de* $b > 0$ *tel que* $\forall t \in]0, b], -t^3 \leq \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leq 0$
17. *Montrer que pour n assez grand* $\left|\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-n\frac{t^2}{6}} dt\right| \leq \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(1 - e^{-nt^3}\right) dt$
18. *Montrer que pour n assez grand* $\left|\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-n\frac{t^2}{6}} dt\right| \leq \frac{\ln^4 n}{2n}$
19. *En déduire que* $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$

(d'après CEAS 2020)