

A I) Calculs algébriques

Partie A : Théorie des ensembles

Exo 1 : Traduire les phrases suivantes :

Pour tout couple de réels, il existe un multiple de l'un supérieur à l'autre

Entre deux réels distincts il existe toujours un rationnel

Ecrire leur négation

Exo 2 : Soient deux suites $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$, $y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n+1}}$

Montrer que $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ et $y_n = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

Exo 3 : Montrer que $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ et $(A \cup B) \subset (A \cup C) \Leftrightarrow B \subset C$

Si $A \cup B = A \cap C$, comparer A,B et C

Exo 4 : f une application de E dans F et g de F dans G

a. si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective

b. si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective

c. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective

d. si $g \circ f$ est injective alors f est injective

e. si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective

f. si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective

Exo 5 : Soit f une application de E dans F

Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall y \in F, f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$

Exo 6 : Montrer que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ pour tout entier naturel n

Exo 7 : L'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $f(n)=n+2$ si n est pair et $f(n)=n+4$ si n est impair, est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exo 8 : Soit A et B deux ensembles, on dit que A et B sont isomorphes s'il existe une application f bijective de A vers B , on notera alors $A \simeq B$. Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence

Exo 9 : Soit la relation $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, zRz' \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, z' = \frac{z \cos \theta + \sin \theta}{-z \sin \theta + \cos \theta}$

Montrer que R est Réflexive, symétrique et transitive, quels sont les complexes en relation avec 0

Exo 10 : Résoudre $x = \sqrt{x+1}$

Exo 11 : Soit la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que si $n \equiv 0 [3]$ alors $f(n) = 2\frac{n}{3}$,

si $n \equiv 1 [3]$ alors $f(n) = 4\frac{n-1}{3} + 1$ et si $n \equiv 2 [3]$ alors $f(n) = 4\frac{n-2}{3} + 3$

Montrer que f est bijective

Exo12 : Trouver les valeurs de n pour que $5^n + 4^n + 2 \equiv 0 \pmod{7}$

Exo13 : On note la relation sur $\mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xRy \Leftrightarrow xe^y = ye^x$. Montrer que R est une relation d'équivalence

Exo14 : Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective

Exo15 : Soit l'application $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ telle que $f(x, y) = (x', y')$ avec $x' = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ et $y' = \frac{2y}{x^2 + y^2}$, montrer que f est bijective

Partie B : Calculs algébriques :

Exo1 : Calculer $\sum_{p=1}^n p^2$ puis $\sum_{p=1}^n p^3$

Exo2 : Calculer $\sum_{p+q=n} \frac{1}{(p+q)^2}$

Exo3 : Déterminer trois réels a, b et c tels que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$

En déduire $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$

Exo4 : Calculer $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)}$

Exo5 : Soit $S_n = \sum_{p=1}^{2n} (-1)^p \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$, calculer $\exp(S_n)$ à l'aide de factoriels

Exo6 : Montrer que pour tout entier n on a : $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

Puis montrer que 13 divise $2^{2002} + 3^{2002}$

Exo7 : Montrer que pour tout entier $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$

Exo8 : Calculer $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2$ (on distinguera le cas où n est pair et où n est impair)

Exo9 : Soit la suite (F_n) telle que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Calculer $\sum_{k=1}^n F_k$ et $\sum_{k=1}^n F_k^2$

Exo10 : Soit f une fonction de $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, pour tout entier n on note

$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$, déterminer $B_n(x)$ respectivement pour les 3 fonctions suivantes : $f : x \mapsto 1$, $f : x \mapsto x$, $f : x \mapsto x^2$

Partie C : Nombres complexes :

Exo1 : Déterminer un complexe dont le carré vaut $8 + 6i$
 Déterminer un complexe dont le carré vaut $5 - 12i$
 Déterminer un complexe dont le carré vaut $7 + 24i$

Exo2 : Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$ en fonction de x et de n

Exo3 : Déterminer le périmètre d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigo

Exo4 : Soit l'équation suivante sur le corps des complexes : $x^{2n} + x^n + 1 = 0$ où n est un entier naturel supérieur à 3

Montrer que cette équation admet $2n$ solutions 2 à 2 distinctes

Exo5 : Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout x on ait :

$$(\sin x)^5 = a \sin(5x) + b \sin(3x) + c \sin(x)$$

Exo6 : $A(1); B(z); C\left(\frac{1}{z}\right); D(1-z)$, déterminer z pour les 4 points soient cocycliques

Exo7 : Résoudre $z^6 = 4 - 4i$

Exo8 : Soit $j = e^{2i\pi/3}$, calculer $1 + j + j^2$

Exo9 : Calculer pour tout réel x : $C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$

B1 : Suites et fonctions

Partie A : Calcul en analyse

Exo1 : Etudier la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$

Montrer que la courbe de f admet la droite $y = -x$ comme asymptote

Exo2 : Etudier la fonction définie par $f(x) = \frac{x(\operatorname{ch}(x) - 1)}{\operatorname{sh}(x)}$

Exo3 : Soit $S = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(kx)$ et $T = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx)$ exprimer S et T

Calculer $U = \sum_{k=1}^n k \operatorname{sh}(kx)$

Exo4 : Etudier la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\operatorname{th}(x)} - \frac{1}{x}$, on admet que la limite en 0 est nulle.

Exo5 : Résoudre $\operatorname{ch}(x) = 2$, $\operatorname{sh}(x) = -1$

Exo6 : Montrer que $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$

Exo7 : Résoudre $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$

Exo8 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$, déterminer son ensemble de définition, puis en posant $x = \sin \alpha$, déterminer une autre écriture de $f(x)$.

Exo9 : Soit la fonction définie par $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) - \arcsin(\operatorname{th}(x))$
Précisez l'ensemble de définition D de f et étudiez cette fonction sur D

Exo10 : Montrer que pour $x \geq 0$, $\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2 \arctan(\sqrt{x})$

Exo11 : Etudier la fonction définie par $f(x) = \arccos(\cos(2x))$ sur $[0, \pi]$

De même pour la fonction $g(x) = \arcsin(\sin 2x)$

Exo12 : Déterminer l'ensemble de définition et de dérivation de la fonction f définie par $f(x) = \arccos(4x^3 - 3x)$

On calculera ensuite $f'(x)$ et on retrouvera une expression de $f(x)$ en fonction de $\arccos x$

Exo13 : Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)}$

Exo14 : Calculer : $\int_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

Exo15 : Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t} = \ln(1+\sqrt{2})$

Exo16 : Calculer : $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\tan x}$

Exo17 : Calculer : $I = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2} dt$ où $x > 0$

Exo18 : Calculer : $I = \int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$

Exo19 : Calculer : $I = \int_0^1 \frac{x-1}{x^3-1} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x-1}{x^3+1} dx$

Exo20 : Calculer $I = \int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$

Exo21 : Calculer I_n en fonction de n : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$

Exo22 : Calculer $\int_{-1/2}^0 \frac{dx}{1+x+x^2}$ puis $\int_{-1/2}^0 \frac{x}{x^3-1} dx$

Exo23 : Calculer $\int_0^1 \frac{x dx}{5+4x+x^2}$

Exo24 : Calculer $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$

Exo25 : Résoudre : $2y'(x) + 3y(x) = xe^x$

Exo26 : Résoudre : $4y'(x) - 3y(x) = (x+1)e^x$

Exo27 : Résoudre : $3y'(x) - y(x) = 3\cos x$

Exo28 : Résoudre : $5y'(x) - 4y(x) = 2\cos x - \sin x$

Exo29 : Résoudre : $xy'(x) - y(x) = x^2 \cos x$ sur $]0, +\infty[$

Exo30 : Résoudre : $2y'(x) - 3y(x) = \cos 2x$

Exo31 : Résoudre : $x^2 y'(x) - y(x) = x^2 - x$ sur $]0, +\infty[$

Exo32 : Résoudre : $xy'(x) + 2y(x) = \cos x$ sur $]0, +\infty[$

Exo33 : Résoudre : $y'(x) \sin x - y(x) \cos x = \sin x - x \cos x$ sur $]0, \pi[$

Exo34 : Résoudre : $y'(x) \cos^2 x - y(x) = e^{\tan x}$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

Exo35 : Résoudre le problème $(x+1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0$, $y(2) = 0$, $x \in]-1, +\infty[$

Exo36 : Résoudre $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x(1-2x)$ on cherchera une solution particulière du type $y_0(x) = e^x(ax^2 + bx)$

Exo37 : Résoudre $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2e^x$

Exo38 : Résoudre $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3e^x$

Exo39 : Résoudre $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = x^2 + 1$

Exo40 : Résoudre $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \sin x$

Exo41 : Résoudre $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = x$

Exo42 : Résoudre $y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = 2\operatorname{sh}(x)$

Exo43 : Résoudre $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 2\operatorname{sh}(x)$

Exo44 : Résoudre $y''(x) - y'(x) + y(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Exo45 : Résoudre $y''(x) - y'(x) + y(x) = 2e^{-3x}$

Exo46 : Résoudre $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2\operatorname{ch}(x)$

Exo47 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y''(x) + y(x) = 2\operatorname{ch}(x)$

Exo48 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y''(x) + y(-x) = \cos x$

Exo49 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y'(x) = y(1-x)$

Exo50 : Résoudre dans $]0,1[$: $xy'(x) + y(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

Partie B : Suites numériques

Exo1 : Soit la suite $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n$

On définit : $v_n = (-1)^n u_n$, $w_n = v_n - v_{n-1}$

Montrer que (w_n) est géométrique, en déduire l'expression de u_n en fonction de n

Exo2 : Soit $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, discuter suivant les valeurs de a et b la nature de cette suite

Exo3 : Soit $S_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$; montrer que si (u_n) converge vers l alors (S_n) converge aussi vers la même limite

Exo4 : Soit la suite (q_n) réelle croissante telle que $q_0 \geq 2$ et $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k}$

Montrer que la suite (u_n) est convergente

Exo5 : Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, montrer que $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ en déduire que cette suite diverge

Montrer que pour tout k entier non nul, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

En déduire que la suite définie par $U_n = S_n - \ln(n)$ est convergente

Exo6 : $u_0 = a$, $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$

On pose $w_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$, montrer que (w_n) est géométrique, en déduire la nature de la suite (u_n)

Exo7 : Etudier la suite $u_0 = \frac{\pi}{2}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$

Exo8 : $(a, b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$, $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

Etudier ces deux suites

Exo9 : Etudier les suites définies par

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \text{ et } u_0 = 0, u_1 = 1$$

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \text{ et } u_0 = 1, u_1 = 1$$

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \text{ et } u_0 = 1, u_1 = 1$$

Exo10 : Etudier la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$

Exo 11 : Etudier la convergence des suites réelles suivantes :

$$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2 + b_n^2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{a_n^2 + b_n^2}$$

Exo12 : On considère la suite (u_n) telle que $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent

Montrer que la suite (u_n) converge

Exo13 : Soit $x_0 \in]0,1[$, $x_{n+1} = \frac{2\sqrt{x_n}}{1+x_n}$, étudier la nature de cette suite

Exo14 : On considère la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n - 2u_n^2$

Etudier la nature de cette suite

(on distinguera les cas $u_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $u_0 \in]-\infty, 0[$ et $u_0 \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$)

Exo15 : Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel positif x

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

$$\text{Montrer que } \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{En déduire la limite de } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Exo16 : On considère les suites $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes

Montrer que leur limite commune est irrationnelle

Partie C : Fonctions de la variable réelle :

Exo1 : Soit $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ continue sur $[0,1]$, montrer qu'il existe c appartenant à $[0,1]$ tel que $f(c) = c$

Exo2 : Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{e^x + 1}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} - x$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Exo3 : Soit une fonction continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$. Montrer que f est une fonction constante

Exo4 : Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^*, xf(x) + 2f\left(\frac{-1}{x}\right) = 3$

Exo5 : Soit f une fonction continue et T -périodique qui admet L comme limite à l'infini, montrer que f est une fonction constante

Exo6 : Soit f définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin(x)$

Montrer que $f^{(n)}(x) = a^n e^{x\sqrt{3}} \sin(x + n\theta)$, a et θ seront à déterminer

Exo7 : Soit $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ continue sur $[0,1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $\forall x \in]0,1[, f(x) \neq x$. On suppose de plus que f est strictement croissante et dérivable en 0.

Montrer que si $\exists a \in]0,1[$ tq $f(a) < a$ alors $0 \leq f'(0) \leq 1$

Exo8 : Soit g une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$

Montrer que : $\int_a^b g(t) \sin(At) dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

Exo9 : Pour tout entier n non nul on note le polynôme P_n telle que : $P_n(x) = \prod_{i=0}^n (x-i)$

Montrer que pour tout n , P'_n admet exactement n racines que nous noterons α_k pour k allant de 1 à n

Exo10 : Soit une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$

Montrer que $\forall c \in]a,b[, \exists d \in]a,b[$ tel que $f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d)$

Exo11 : Soit une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$

Montrer que $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(c) = f''(c)$

Exo12 : Soit 2 fonctions f et g de classe C^1 sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b], g'(x) \neq 0$

Montrer que $\exists c \in]a,b[$ tel que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

A2 : Algèbre générale

Partie A : Arithmétique

Exo1 : Montrer que si n est impair alors 8 divise n^2-1 .

Montrer que si n n'est pas divisible par 3 alors 3 divise n^2-1

Exo2 : Montrer que si a^2+b^2 est divisible par 7 alors a et b sont divisibles par 7

Exo3 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants

$$a^\circ) \begin{cases} a < b \\ p \gcd(a,b) = 12 \\ a + b = 144 \end{cases} \quad b^\circ) \begin{cases} a < b \\ p \gcd(a,b) = 121 \\ ab = 439230 \end{cases} \quad c^\circ) a^2 = b^2 + 15$$

Exo4 : Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs $900x-84y = 12$

Exo5 : Montrer que si a et c sont premiers entre eux et que b et c soient aussi premiers entre eux , alors ab et c sont premiers entre eux

Exo6 : Soit p un nombre premier et q un entier tel que $0 < q < p$, montrer que p divise $\binom{p}{q}$

Exo7 : Soient a et b deux entiers premiers entre eux , a est impair et b est pair, soit d le PGCD de $(a+b)$ et $(a-b)$, montrer que d divise a , en déduire que $(a+b)$ et $(a-b)$ sont premiers entre eux

Exo8 : $14! + 1$ est il multiple de 15
 $20! + 1$ est il multiple de 21 ?

Exo9 : On suppose $2^{n+1} - 1$ premier , calculer la somme des diviseurs de $a = 2^n (2^{n+1} - 1)$

Exo10 : montrer que $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est un multiple de 11

Exo11 : Soit p un nombre premier qui divise m^2 , montrer que p divise m

Partie B : Structures algébriques

Exo1 : $E = \mathbb{Q} - \{1\}$; $a * b = a + b - ab$; montrer que $(E, *)$ est un groupe

Exo2 : $E =]-1, 1[$; $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$; montrer que $(E, *)$ est un groupe

Exo3 : $(G_1, *)$ et $(G_2, *)$ sont 2 groupes
Montrer que $(G_1 \cup G_2, *)$ est un groupe $\Leftrightarrow G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$

Exo4 : $(G, *)$ un groupe non abélien
Montrer que $\Gamma = \{\alpha \in G, \forall x \in G, \alpha * x = x * \alpha\}$ est un sous groupe de G

Exo6 : Etude de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ et de ses éléments inversibles

Exo7 : La somme de 2 éléments nilpotents est nilpotente

Exo8 : Soit $(A, +)$ et $(B, +)$ deux sous groupe de $(G, +)$

On définit $A+B = \{x+y, x \in A \text{ et } y \in B\}$

Montrer que $(A+B, +)$ est un groupe

On montrera ensuite qu'il s'agit du plus petit sous-groupe de G contenant $A \cup B$

Partie C : Polynômes :

Exo1 : Soit T_n une fonction telle que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$

Montrer que T_n est un polynôme dont on précise le degré

Montrer que $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

Exo2 : Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)(x-b)$

Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)^2$

Exo3 : Dans $\mathbb{R}[X]$, justifier l'existence puis déterminer le polynôme P de degré minimal qui soit divisible par X^2+1 et tel que $P(X)-1$ soit divisible par X^3+1

Exo4 : Déterminer un polynôme P de degré 4 tel que $(X-2)^2$ divise $P(X)+112$ et $(X+2)^3$ divise $P(X)-144$

Exo5 : Soit l'équation (E) : $x^3 + px + q = 0$ où p et q sont deux réels quelconques.
Déterminer une condition sur p et q pour que (E) ait une racine double.

Exo6 : Décomposer en éléments premiers dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $x^8 + x^4 + 1$

Exo7 : Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de coefficient dominant 1 admettant a comme racine dans $\mathbb{Q}$. Montrer que $a \in \mathbb{Z}$

Exo8 : Soit $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, pour $x > 1$

Etablir que $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}$ où P_n est une fonction polynomiale

Exprimer $(x^2-1)f'(x)$ en fonction de x et $f(x)$

Etablir à l'aide de la formule de Leibniz que $P_{n+1}(x) + A_n(x)P_n(x) + B_n(x)P_{n-1}(x) = 0$ où A_n et B_n sont des polynômes à préciser

Démontrer que $P'_n(x) = -n(n-2)P_{n-1}(x)$ pour $n \geq 1$

Exo9 : Déterminer le pgcd des deux polynômes suivants :

$a(x) = 3x^5 - x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$ et $b(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$

Exo10 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fonction $f(x) = \frac{1}{x^4-1}$

Exo11 : Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2+x^4}$

Décomposer f en éléments simples. Calculer $\int_0^1 f(t) dt$

Déterminer la limite de S_n avec $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{1+i^2+i^4}$

Exo12 : Déterminer la limite de S_n avec $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$

Exo13 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$, $f(x) = \frac{x \sin \alpha}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Exo14 : Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$

Exo15 : Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)}$

Exo16 : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\tan x}$

Exo17 : Calculer $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t} dt$

Exo18 : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t} dt$

Exo 19 : Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t} = \ln(1+\sqrt{2})$

B2 : Complément d'analyse

Partie A : Analyse asymptotique

Exo1 : Soit $x_0 \in]0,1[$, $x_{n+1} = \frac{2\sqrt{x_n}}{1+x_n}$. Montrer que $x_n \in [0,1]$

Soit $z_n = \sqrt{1-x_n^2}$, montrer que $z_{n+1} = O(z_n^2)$

Exo2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exo3 : Montrer que $\ln(n+1)$ et $\ln n$ sont équivalents lorsque n tend vers l'infini

Exo4 : Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

Exo5 : Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

(on pourra chercher un DL₂(0) de $\arccos(1-u^2)$)

Exo6 : Déterminer un développement limité à l'ordre 7 en 0 de $\tan(x)$

En déduire un développement limité à l'ordre 7 en 0 de $\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x))$

Exo7 : Effectuer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$

Exo8 : Donner un DL à l'ordre 4 en 0 de $\tan\left(\frac{\pi}{4}e^{-x}\right)$

Exo9 : Soit $f(x) = \frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{x}$, déterminer la limite en 0

Exo10 : La fonction suivante est-elle prolongeable par continuité en 0 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$?

Son prolongement est-il de classe 1 ?

Exo11 : Déterminer un DL à l'ordre 7 en 0 de $f(x) = \sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)$

Partie B : Intégration

Exo1 : Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$ et telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$

Montrer que f admet un point fixe

Exo2 : Soit g une fonction continue et positive sur $[a,b]$, et f une fonction continue sur $[a,b]$, montrer qu'il existe c appartenant à $[a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$

Exo3 : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k}$, en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{3n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$

Exo4 : déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$

Exo5 : Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$

Exo6 : Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k)^3 + n^3}$ déterminer la limite de cette suite

Exo7 : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2n}^{4n} \frac{1}{k}$

Exo8 : Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx = 0$

Exo9 : Déterminer les fonctions f continue sur $[a,b]$ telles que

$\int_a^b f^2(t)dt, \int_a^b f^3(t)dt, \int_a^b f^4(t)dt$ soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

Exo10 : Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$

Exo11 : Montrer que $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!}$

Exo12 : Soit α une fonction C^1 et bijective de I dans J , et f continue sur J calculer $\left(\int_0^{\alpha(x)} f(t) dt \right)'$. En déduire la valeur de $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t}) dt$

Partie C : Série Numérique

Exo1 : Déterminer la nature des séries de terme général :

$$U_n = \frac{1}{n(n + \ln(n))} ; U_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right), u_n = \frac{1}{n \ln n}, u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2} \text{ et } u_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$$

Exo2 : Déterminer la nature de la série de terme général : $U_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Exo3 : Déterminer la nature de la série de terme général : $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$

Exo4 : Déterminer la nature de la série de terme général : $U_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$

Exo5 : Déterminer la nature de la série de terme général : $U_n = (-1)^n \frac{2n-1}{n(n+1)}$

Exo6 : Calculer la somme de la série de terme général : $U_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Exo7 : Déterminer la nature de la série de terme général : $U_n = 1 - n \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$

Exo8 : Calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{3^{n+1}(n+1)}$

Exo9 : Etudier la nature des séries suivantes $u_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-2n+2}\right)$, $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2 + (n-p)^2}$

Exo10 : On pose : $a_n = (n+1)\ln(n+1) - n - \ln(n!)$; $u_n = a_n - a_{n-1}$

Quelle est la nature de la série de terme général u_n , montrer alors la divergence de la suite de terme général a_n

Exo11 : Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n - 1}{n!}$

Exo12 : Soit une suite (u_n) telle que $\sum n^2 u_n$ converge, montrer que $\sum u_n$ converge

Exo13 : Soit une suite (u_n) telle que $\sum n^2 u_n^2$ converge, montrer que $\sum u_n$ converge

Exo14 : Soit une suite (u_n) telle que $\sum u_n$ converge absolument, montrer que $\sum u_n^2$ converge

Exo15 : Soit la suite définie par $u_n = \int_1^n \frac{\sin t}{t} dt$, montrer que cette suite est convergente

A3 : Algèbre linéaire

Partie A : Espaces vectoriels

Exo1 : Soit E l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle, F l'ensemble des fonctions paires et G l'ensemble des fonctions impaires

Montrer que $E = F \oplus G$

Exo2 : Soit $E = \mathbb{R}^3$, soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$

Montrer que H est un sous espace vectoriel de E , déterminer un vecteur e_1 tel que $H = \text{vect}(\{e_1\})$

Exo3 : Soit $E = \mathbb{R}^3$, soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$

Montrer que H est un sous espace vectoriel de E , déterminer un vecteur e_1 tel que $H = \text{vect}(\{e_1\})$

Exo4 : Soit $E = \mathbb{R}^3$, soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ ou } x - y - z = 0\}$

Déterminer $\text{vect}(H)$

Exo5 : Soit $E = \mathbb{R}^3$, soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -x \text{ ou } y = -x\}$

Déterminer $\text{vect}(H)$

Exo6 : Soit $F = \{(x, y, -x, 2y), \text{ avec } x \text{ et } y \text{ réels}\}$, $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$

$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}$

F et G sont ils supplémentaires ? de même pour F et H

Exo7 : Dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$

Comparer $\text{vect}(\{chx, shx\})$ et $\text{vect}(\{e^x, e^{-x}\})$

Exo8 : E un espace vectoriel, E^* l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$, A un sous espace vectoriel de E , on définit l'ensemble $A^\perp = \{f \in E^*, \forall x \in A, f(x) = 0\}$, montrer qu'il est un sous espace vectoriel de E^* . Soit A et B deux sous espaces vectoriels de E , montrer que $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

Exo9 : Soit E un espace vectoriel, et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille linéairement indépendante

a. La famille $(u_1 - u_2, u_2 - u_3, \dots, u_{n-1} - u_n, u_n - u_1)$ est-elle libre ou liée ?

b. La famille $(u_1 + u_2, u_2 + u_3, \dots, u_{n-1} + u_n, u_n + u_1)$ est-elle libre ou liée ?

Exo10 : Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y - 3z - t = 0\}$

a. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

b. Déterminer une base de E

Exo11 : Montrer que les trois fonctions $f : x \rightarrow \sin x$, $g : x \rightarrow \sin(x+a)$, $h : x \rightarrow \cos(x+b)$ sont liées

Exo12 : Comment choisir $z = a+ib$, pour $(z, \bar{z})$ soit une base de $\mathbb{C}$?

Exo13 : Soient deux endomorphisme u et v tels que $uov = vou$, montrer que le noyau et l'image de u sont stables par v

Exo14 : Soit un endomorphisme u et x un vecteur que vaut $u(x)$ lorsque x appartient au noyau de $u + 3Id$

Exo15 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 , et f un endomorphisme de E tel que : $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$, on note $e \in E$, tel que $f^2(e) \neq 0$ montrer que $(e, f(e), f^2(e))$ est une base de E .

Exo16 : Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tel que $p+q = Id$

a. Montrer que $pq = qp = 0$

b. Montrer que $\text{Im } p$ et $\text{Im } q$ sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exo17 : Soit E un espace vectoriel , montrer que la somme de deux projecteurs p et q de E est un projecteur de E si et seulement si $pq = qp = 0$

Exo18 : Soit E un espace vectoriel et p un projecteur de E

1. Montrer que $\text{Im } p = \text{Ker}(p - Id)$

2. Soit g un endomorphisme de E tel que $pog = gop$, montrer que $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont stables par g

3. Montrer que si $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont stables par g alors $pog = gop$.

Exo19 : E un espace vectoriel , f une application linéaire de E

Montrez que : $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$

Exo20 : Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^2 - 5f + 6Id = 0$

Montrer que E est la somme directe des sous espaces $\text{Ker}(f - 2Id)$ et $\text{Ker}(f - 3Id)$

Exo21 : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n vérifiant :

$$(f - aId_E) \circ (f - bId_E) = 0 \text{ où } a, b \text{ sont réels tq } ab \neq 0$$

Montrer que f est inversible et préciser son inverse

Exo22 : Soit E un espace vectoriel de dimension n , f et g sont deux endomorphismes de E

1°) Montrer que si $\forall x \in E, fog(x) = 0$ alors $\text{Im } g \subset \text{Ker } f$ puis que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n$

2°) Montrer que si $f+g$ est bijectif alors $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ puis que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \geq n$

Exo23 : E un espace vectoriel de dimension finie , f une application linéaire de E

Montrez que : $E = \text{Ker } f + \text{Im } f \Rightarrow E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f \Rightarrow \text{Im } f = \text{Im } f^2$

Exo24 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , et f une forme linéaire de E non nulle, c'est à dire une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$

1. Montrer que $\text{Ker } f$ est un hyperplan de E

2. soit f et g deux formes linéaires non nulles, montrer l'équivalence suivante :

$$\text{ker } f = \text{ker } g \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } f = kg$$

Exo25 : Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension n

Etablir l'existence d'un entier k tel que : $\text{ker } u^k = \text{ker } u^{k+1}$

Montrer alors que pour tout entier p supérieur à k : $\text{ker } u^k = \text{ker } u^p$

Exo26 : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u(x, y, z) = (x - z, y - x, z - y)$

Déterminer une base de son noyau et de son image

Exo27 : Soit u un endomorphisme d'un espace de dimension n

Montrer que $\text{Im } u = \text{ker } u \Leftrightarrow u \circ u = 0$ et $n = 2 \text{rg}(u)$

Exo28 : Déterminer le rang de la famille des vecteurs suivants

$x = (1, 2, -1, 3)$, $y = (2, 0, 1, -2)$, $z = (4, 4, -1, 4)$ et $t = (7, 6, -1, 5)$

Partie B : Matrices

Exo1 : Déterminer la matrice de l'application linéaire f définie par :

$$f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exo2 : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n , montrer que la trace de AB est égale à la trace de BA . Calculer la trace de la matrice $A^t A$

Exo3 : Soit M une matrice carrée d'ordre 3, de rang 2. Quelle est la dimension du noyau de la transposée de M ?

Exo4 : Soit la matrice A carrée d'ordre n telle que $a_{ij} = ij^2$, calculer la matrice A^2

Exo5 : Soit la matrice carrée d'ordre 3 définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculez A^2 et exprimez le résultat comme une combinaison linéaire de A et I

2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de A et I

Exo6 : Soit la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ où $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

a. Calculer $P = M^2 + I_3$, P^2 , PM et MP

b. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont P est la matrice, déterminer le noyau et l'image de f

Exo7 : Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} cha & sha \\ sha & cha \end{pmatrix}$, calculer A^n

Exo8 : Soit la matrice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^n

Exo9 : Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Soit u l'endomorphisme de E qui à tout polynôme P de E fait correspondre le polynôme $u(P)$ tel que $u(P)(x) = P(x+1) - P(x)$

On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer la base (p_1, p_2, p_3, p_4) de E dans laquelle la matrice de u serait A .

Exo10 : Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Exo 11 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x - 3y + 2z \\ -x + y - 2z \\ -x + 3y - 4z \end{pmatrix}$$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Déterminer une base du noyau et de l'image

Exo12 : Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (2, -1)$ et $e_2 = (-3, 2)$, déterminer la matrice de la projection sur $\text{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Exo13 : Soit $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $X + \text{tr}(X)A = B$

Exo14 : $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence entre ces 2 propriétés

(i) ${}^tMM = M {}^tM$

(ii) il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique A telles que $M = A + S$ et $AS = SA$

Exo15 : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exo16 : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exo17 : Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables

Exo18 : Soit $A, B, C, D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$

On suppose M, A, D inversibles. Calculer l'inverse de M

Exo19 : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$

Montrer que $\text{rang}(AP) = \text{rang}(A)$

Puis que $\text{rang}(PA) = \text{rang}(A)$

Exo20 : Soit A une matrice carrée d'ordre 3 telle que $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$

Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, en déduire les matrices qui commutent avec A

Exo21 : Soit $E_{i,j}$ une matrice de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, pour toute matrice A calculer $\text{Tr}(AE_{i,j})$, puis montrer que si $\text{Tr}(AM) = 0$, $\forall M$, alors la matrice A est nulle

Exo22 : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note : $f_A : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f_A(M) = AM$

Montrer que f_A est bijective si et seulement si A est inversible

Exo23 : Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ de rang 1 et telle que $A^2 = 0$

Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exo24 : Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1, -1)$ et $e_2 = (2, 3)$, déterminer la matrice de la symétrie par rapport à $\text{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Partie C : Déterminants

Exo1 : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$

Exo2 : Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

Exo3 : Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

Exo4 : Déterminer X pour lesquels $D(X) = 0$ avec $\begin{vmatrix} X & \sin \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin \alpha & X & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \sin \alpha & X \end{vmatrix}$

Quelles sont les valeurs de α pour les quelles $D(X)$ admet une racine double

Exo5 : Déterminez les valeurs de x pour les quelles le déterminant suivant est nul.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -x-1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -x-1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3-x & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix}$$

Exo6 : Déterminez les valeurs de x pour les quelles le déterminant suivant est nul.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -x-1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -x-1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1-x & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix}$$

Exo7 : Résoudre $\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{cases}$

Exo8 : Soit $A, B, C, D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$

On suppose D inversible telle que $CD = DC$

Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$

Exo9 : Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers relatifs, $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$

Montrer que A est inversible dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$

Exo10 : Soit $P(x) = \det(A - xI_n)$ où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que P est un polynôme de degré n et que $P(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} x^{n-1} \text{tr} A + \dots + \det A$

Exo11 : Soit $n \geq 2$, A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, telle que

$$\forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \det(A + B) = \det A + \det B$$

Montrer que si A est de rang p alors p est nul, que peut-on en déduire de A

Exo12 : Déterminer le rang de la comatrice de A en fonction du rang de A

Exo13 : Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exo14 : Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ calculer $\det(A - xI_3)$ sous forme factorisée

Exo15 : Calculer $\det \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & -x & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -x & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -x & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 - x \end{pmatrix}$

Partie D : Espace euclidien

Exo1 : E l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$

Montrer que $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E

Exo2 : Montrer que f définit un produit scalaire.

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \rightarrow (x - 2y)(x' - 2y') + yy' + (y + z)(y' + z')$$

Déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire

Exo3 : E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.,.)$, F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E , montrer que $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$

Exo4 : Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients dans $\mathbb{R}$, pour A et B deux matrices on note : $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB)$, montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire de E

Exo5 : Soit f un endomorphisme de E , un espace préhilbertien.

Montrer que $\forall x, \|f(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow \forall x, y, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

Exo6 : Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$, déterminer une base orthonormale de H

Exo7 : Soit p un projecteur orthogonal sur F un sous espace vectoriel de E

Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$

Exo8 : Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base et son produit scalaire canoniques on définit l'espace :

$$H : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Déterminer une base de H , puis de son orthogonal

En déduire la matrice de la projection orthogonale sur H dans la base canonique

Exo9 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 tP(t)Q(t)dt$

Montrer que $\langle \rangle$ est bien un produit scalaire sur E , et déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire

Exo10 : Soit $E = \mathbb{R}^4$, on définit Π par les équations suivantes

$$\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + z - t = 0 \end{cases}$$

On note $X = (1, 1, 1, -1)$, déterminer $d(X, \Pi)$

Exo11 : Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère D la droite engendrée par le vecteur de coordonnées : $(1, 1, 1)$

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur D dans la base canonique

Exo12 : Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère P le plan engendré par les vecteurs de coordonnées : $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 0)$

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur P dans la base canonique

Exo13 : Soit $F = \text{Vect}((1, -2, 1, 0), (1, 0, 1, 2))$ déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F .

Exo14* : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice est donnée par $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Montrer que f est une rotation vectorielle, vous préciserez son axe et son angle

Exo15* : f l'application linéaire donnée par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Caractérissez f

Exo16* : f l'application linéaire donnée par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z) \\ y' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z) \\ z' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z) \end{cases}$$

Montrez que f est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques

Exo17 : Calculer a, b, c, d et e pour A soit une matrice de rotation avec $a > 0$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} & c \\ \frac{2}{7} & a & d \\ \frac{6}{7} & b & e \end{pmatrix}$$

Exo18 : Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale autour de l'axe engendré par $e = (1, 2)$

Exo19* : Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe dirigé par $x = (1, 1, 1)$

Exo20* : Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par $e_1 = (1, 1, 1)$ et $e_2 = (1, 0, 2)$

Exo21 : Soit E un espace euclidien de dimension 4 sur le corps des complexes.

Un endomorphisme orthogonal q de E est appelé quart de tour si $q^2 = -\text{Id}$

Montrer qu'un quart de tour transforme tout vecteur x de E en un vecteur orthogonal à x

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et q un quart de tour, on note $f = \cos \alpha \text{Id} + \sin \alpha q$. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal

C : Probabilité

Partie A : Dénombrements et probabilités

Exo1 : Dans un village de 700 habitants, existe t'il au moins deux personnes qui ont les mêmes initiales

Exo2 : Quel est le nombre de parties de $\llbracket 3, 7 \rrbracket$?

Exo3 : Une immatriculation de voiture en France est composée de 7 caractères : 2 lettres, 3 chiffres et 2 lettres (ex : DC-125-EF) , les lettre I, O et U ne sont pas utilisées et les séries SS et WW ne sont pas utilisés dans le blocs de lettres de gauche et la série SS ne l'est pas dans le bloc de droite . Dénombrer les nombre d'immatriculations possibles sachant que la série de chiffres débute à 001 .

Combien y a t'il de plaque d'immatriculation contenant exactement un A et un 7 ?

Combien y a t'il de plaque avec au moins un A et un 7 ?

Exo4 : Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules de 6 à 15 sont noires

On tire simultanément 5 boules de l'urne

a. Combien y a t'il de tirages possibles ?

b. Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?

On tire successivement 5 boules sans remise

a. En tenant compte de l'ordre combien y a t'il de tirages possibles ?

b. Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires sans tenir compte de l'ordre

Exo5 : Combien y a t'il d'anagramme du mot ASSIS ?

Exo6 : Combien y a t'il d'anagrammes de TARATATA ?

Exo7 : Dans un lycée de 1200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 de la musique et 453 ne font ni du sport, ni de la musique . Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens

Exo8 : Dans une classe de 30 élèves combien peut former de trinômes ?

Exo9 : A l'aide de dénombrement montrer que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Exo10 : Quel est le cardinal de $\{(p, q) \in \mathbb{N}^2, p + q \leq n\}$

Exo11 : Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $S(n, p)$ le nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, p \rrbracket$

a. Déterminer $S(n, p)$ si $p > n$

b. Calculer $S(n, 1)$ et $S(n, n)$

c. Combien d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\{1, 2\}$ ne sont pas surjectives ? En déduire $S(n, 2)$

- d. Montrer que $S(n, 3) = 3^n - 3 - 3S(n, 2)$, en déduire $S(n, 3)$
- e. On suppose $p \leq n$. Montrer que $S(n, p) = p(S(n-1, p) + S(n-1, p-1))$
- f. En déduire que $S(n, p) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$
- g. En déduire la valeur de $A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n$

Exo12 : On considère un jeu de 32 cartes et on tire au hasard 5 cartes de ce jeu
 Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?
 Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux rois ?

Exo13 : Une urne contient 15 boules : 1 noire, 5 blanches et 9 rouges
 On tire simultanément au hasard 3 boules
 Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage tricolore ?
 Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage avec exactement 1 noire et au moins une rouge ?
 Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage monocolore ?

Exo14 : Au moment où chacun possède un tiers du marché de la téléphonie mobile, trois opérateurs A, B et C décident de lancer un nouveau type de forfait annuel
 A la fin de l'année, l'évolution des parts de marché se fait de la manière suivante
 -- les clients de la compagnie A se répartissent indifféremment entre A, B et C l'année suivante
 -- les clients de la compagnie B restent toujours fidèles à cette compagnie
 -- les clients de la compagnie C seront l'année suivante clients de A avec une probabilité de 1/12, de B avec une probabilité de 7/12 et de C avec une probabilité de 1/3
 On note a_n, b_n et c_n la probabilité qu'à l'issue de l'année n , un consommateur décide de s'abonner chez A, B ou C pour l'année suivante
 1. Exprimer une relation entre a_n, b_n, c_n et $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$
 2. En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n et déterminer la limite de ces suites

Exo15 : Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à l'autre du triangle (ABC) selon le protocole suivant
 -- lorsqu'à un instant donné, elle se situe en A, elle se fixe à l'instant suivant en B avec la probabilité 0,75
 -- lorsqu'elle est en B, elle se fixe en A avec une probabilité de 0,75
 -- lorsqu'elle est en C, elle ira toujours en B

On note a_n, b_n et c_n la probabilité qu'à l'instant n , la particule se trouve en A, B ou C

- Exprimer une relation entre a_n, b_n, c_n et $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$
- En déduire l'existence d'une matrice M carrée d'ordre 3 telle que

$${}^t(a_{n+1} \ b_{n+1} \ c_{n+1}) = M \times {}^t(a_n \ b_n \ c_n)$$

- Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}MP$

- En déduire l'expression de M^n , puis de a_n, b_n et c_n

5. Etudier les limites de a_n, b_n et c_n

Exo16 : On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité $1/8$, 1 ou 2 descendants avec la probabilité de $3/8$, et aucun descendant avec la probabilité de $1/8$, indépendamment de ces congénères

A l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu, donc l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité $x_1 = \frac{1}{8}$

1. Déterminer x_2 la probabilité que l'espèce ait disparu à l'issue de la seconde génération
2. On note x_n la probabilité que l'espèce ait disparu qu'à l'issue de la n ème génération.
Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n
3. Montrer que la suite (x_n) converge vers $-2 + \sqrt{5}$

Exo17 : Quatre urnes contiennent des boules blanches et noires, l'urne 1 contient 4 blanches et 1 noires, l'urne 2 contient 3 blanches et 2 noires, l'urne 3 contient 2 blanches et 3 noires, et l'urne 4 contient 1 blanche et 4 noires

On choisit l'urne i avec une probabilité de $\frac{i}{10}$, puis on tire une boule au hasard dans cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche
On suppose que la boule tirée est blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne 1 ?

Exo18 : On classe les automobilistes assurés dans 3 catégories d'âges : moins de 25 ans, de 25 à 50 ans et plus de 50 ans. Le tableau nous donne la proportion de chaque catégories et la probabilité qu'un assuré de cette catégorie déclare un accident dans l'année

Classe	Proportion	Probabilité
Moins de 25 ans	0,25	0,12
De 25 à 50 ans	0,53	0,06
Plus de 50 ans	0,22	0,09

Un assuré est choisi au hasard quelle est la probabilité qu'il ait déclaré au moins un accident dans l'année ?

Quelle est la probabilité pour qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident soit âgé de moins de 25 ans ?

Quelle est la probabilité pour qu'un assuré de plus de 25 ans ait déclaré au moins un accident ?

Quelle est la probabilité qu'un assuré n'ayant pas déclaré d'accident soit âgé de 25 à 50 ans ?

Partie B : Variables aléatoires :

Exo1 : Si $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ que vaut $E(\ln X)$

Exo2 : A t'on $E(X^2) \geq E(X)^2$?

Exo3 : Soit X et Y deux variables aléatoires dont on donne la loi conjointe

$Y \setminus X$	0	1	2
0	$1/30$	$11/30$	$1/30$
1	$6/30$	$5/30$	$6/30$

Donner les lois marginales de X et Y

Calculer leur espérance ainsi que la covariance de X et Y

X et Y sont elles indépendantes ?

Exo4 : Soit X et Y deux variables aléatoires dont on donne la loi conjointe

$Y \setminus X$	0	1	2	3
1	0,1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0	0	0,1
3	0,1	0	0,2	0

Donner les lois marginales de X et Y

Calculer leur espérance

On note $U = X \times Y$ déterminer la loi de U

En déduire la covariance de X et Y

On note $V = \min(X, Y)$ déterminer la loi de V

Former la loi conjointe de U et V

Exo5 : Calculer la probabilité de gagner 5 fois sur 7 au pile ou face

Puis la probabilité de gagner au moins une fois au pile ou face sur n expériences

Exo6 : On effectue une suite de lancer d'un dé à 6 faces, quel nombre de lancers suffit il pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6

est comprise entre $\frac{1}{6} - 0,01$ et $\frac{1}{6} + 0,01$?

Exo7 : Une urne contient 4 boules dont 1 verte, 1 blanche et 2 rouges. On extrait successivement les 4 boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la boule blanche et Y celui de la seconde boule rouge

Donner la loi conjointe de X et Y

Exo8 : Une urne contient $2n$ boules : n rouges et n noires. On pioche au hasard et simultanément n boules. On appelle X le nombre de boules rouges obtenues

Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance

Exo9 : Dans une ville une proportion p de la population est atteinte par un virus contagieux.

Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée il y a 2 chances sur 3

qu'elle soit à son tour contaminée. Un représentant de commerce en parfaite santé décide de rendre visite à n habitants de cette ville. On note N le nombre de personnes contaminées qu'il rencontre. Donner la loi de N . Quelle est la probabilité qu'il soit contaminé à la fin de sa journée ?