Problème 2 :

On désigne par n un entier naturel supérieur à 2.
Le but de ce problème est d'étudier les matrices de Kac : A_n *et* B_n *de* $M_{n+1}(\mathbb{R})$

Partie 1 : un exemple avec $n = 2$

1. *On considère les matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Déterminer leur polynôme caractéristique. Trouver une relation entre* $\chi_A(x)$ *et* $\chi_B(ix)$.
2. *Les matrices A et B sont-elles diagonalisable dans* $M_3(\mathbb{R})$ *et dans* $M_3(\mathbb{C})$ *?*

Partie 2 : étude d'un endomorphisme de dérivation

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x)$
On note V_n *le* $\mathbb{C}$*−espace vectoriel engendré par* $(f_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$: $V_n = \{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k, (\lambda_k) \in \mathbb{C}^n\}$

3. *Montrer que la famille* $(f_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ *est libre. En déduire la dimension de* V_n.
4. *Pour* $k \in [\![0, n]\!]$, *montrer que la fonction* f'_k, *la dérivée de* f_k *appartient à* V_n.
5. *On note* $\varphi_n : V_n \to V_n$ *telle que* $\varphi_n(f) = f'$. *Déterminer la matrice* B_n *de* φ_n *dans la base de* V_n.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$

6. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.
7. *En déduire que* $\forall k \in [\![0, n]\!], g_k \in V_n$
8. *Pour* $k \in [\![0, n]\!]$, *calculer* $\varphi_n(g_k)$. *En déduire que* B_n *est diagonalisable dans* $M_n(\mathbb{C})$.
9. *Pour quelle valeur de n,* φ_n *est-il un automorphisme ?*

Partie 3 : Matrice de Kac

On pose $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$.

Par exemple $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R})$

On note $D_n \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ *diagonale telle que* $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $d_{kk} = i^{k-1}$

10. *Montrer que* $D_n^{-1} A_n D_n = -iB_n$, *où* B_n *est la matrice obtenue à la question 5.*
11. *En déduire une relation simple entre* $\chi_{A_n}(x)$ *et* $\chi_{B_n}(ix)$
12. *En déduire que* A_n *est diagonalisable dans* $M_n(\mathbb{R})$.