

Problème :

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul, on note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbf{R})$

Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$, on désigne le polynôme caractéristique de M par :

$$P_M(x) = \det(xI_n - M)$$

L'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est muni de sa base canonique $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

On identifie $\mathbf{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $M_{n,1}(\mathbf{R})$

On dira qu'un vecteur $X \in \mathbf{R}^n$ est positif (resp. strictement positif) et on notera $X \geq 0$ (resp. $X > 0$) lorsque toutes ses coordonnées dans la base β sont positives (resp. strictement positives)

Pareillement on dira qu'une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ est positive (resp. strictement positive) et on notera $M \geq 0$ (resp. $M > 0$) lorsque tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs)

On notera $\text{Spec}A$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A et lorsque $\text{Spec}A \neq \emptyset$, on pose

$$\rho(A) = \sup_{\lambda \in \text{Spec}A} (|\lambda|)$$

Pour $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $F_J = \text{Vect}(e_i, i \in J)$

On dira que $A \in M_n(\mathbf{R})$ est irréductible si $\{0\}$ et $\mathbf{R}^n$ sont les seuls sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ de la forme F_J , stables par l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base β

On admettra dans les parties I et II qu'une matrice positive irréductible admet une valeur propre $\lambda > 0$ associée à un vecteur propre $X \geq 0$

La démonstration de ce résultat fait l'objet de la partie III.

Preliminaires :

1.a : Donner un exemple de matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ pour laquelle $\text{Spec}A = \emptyset$

1.b : Montrer que pour toute matrice $A \in M_3(\mathbf{R})$, $\text{Spec}A \neq \emptyset$

2.a : Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ et $A > 0$, soit $e_{i_0} \in \beta$, montrer que $Ae_{i_0} > 0$

2.b : Prouver que si $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, $J \neq \llbracket 1, n \rrbracket$, $i_0 \in J$, alors le sous espace F_J n'est pas stable par l'endomorphisme associé à A

2.c : En déduire que si $A \in M_n(\mathbf{R})$, $A > 0$ alors A est irréductible

Partie I :

On considère A une matrice positive irréductible et $\lambda \in \text{Spec}A$, $\lambda > 0$

On pose $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les coordonnées dans β du vecteur propre positif X de la matrice A associé à λ

1.a : On pose $J = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \neq 0\}$, montrer que $\forall i \notin J, \forall j \in J, a_{ij} = 0$

1.b : Prouver que F_J est stable par l'endomorphisme associé à A

1.c : En déduire que $X > 0$

2. On note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, un vecteur propre de A associé à une valeur propre réelle μ , on pose $m = \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{|y_i|}{x_i}$

et p l'entier tel que $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $m = \frac{|y_p|}{x_p}$

2.a. : Montrer que $\mu y_p = \sum_{j=1}^n a_{pj} y_j$

2.b. : En déduire que $|\mu| \leq \lambda$

On vient donc de prouver que $\lambda = \rho(A)$

3. Montrer que si μ est une valeur propre non nulle de A associée à un vecteur propre positif, alors $\mu > 0$ et $\mu = \lambda$

4. Dans cette question on suppose que $A > 0$, soit Y un vecteur propre associé à la valeur propre $\rho(A)$. Prouver que Y est colinéaire à X .

5. Le but de cette question est de généraliser le résultat de la question 4 au cas où $A \geq 0$. Soit $Y \neq 0$ un vecteur positif dont au moins une coordonnée est nulle. On pose $Z = (I_n + A)Y$ et on note $(z_1, \dots, z_n)$ ses coordonnées dans β .

On introduit $J = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_i \neq 0\}$ et $J' = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, z_i \neq 0\}$

5.a. : Montrer que $J \subset J'$

5.b. : En supposant que $J = J'$, prouver que $\forall i \notin J, \forall j \in J, a_{ij} = 0$

5.c. : En déduire que l'inclusion $J \subset J'$ est stricte

5.d. : En déduire que $(I_n + A)^{n-1} > 0$

5.e. : En considérant X' un vecteur propre non nécessairement positif, associé à $\rho(A)$. Montrer que X' est colinéaire à X .

Partie II :

On a démontré, à la partie I que l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$, où A est une matrice positive irréductible, est de dimension 1

On se propose de montrer que $\rho(A)$ est une valeur propre simple.

Pour alléger les notations, on pose $\rho = \rho(A)$ et $B = {}^t \text{Com}(\rho I_n - A)$, on suppose que $B \neq 0$

1. Montrer que $(\rho I_n - A)B = 0$

2. Montrer que B est de rang 1 et préciser son image

3. En déduire que si une colonne de B n'est pas nulle, alors elle ne contient aucun coefficient nul et tous ses coefficients sont de même signe

4.a. : Soit $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et I son complémentaire, en remarquant que $(F_J)^\perp = F_I$, pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$, prouver que ${}^t A$ est irréductible

4.b. : Justifier que si une colonne de ${}^t B$ n'est pas nulle, alors elle ne contient aucun coefficient nul et que tous ses coefficients sont de même signe

5. En déduire que tous les coefficients de B sont non nuls et de même signe.

6. On note $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ la matrice diagonale dont les x_i sont les coefficients diagonaux, on définit une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n) - A)$$

6.a. : Calculer pour tout $k \in [1, n]$ la dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\rho, \rho, \dots, \rho)$

6.b. : En déduire que $P'_A(\rho) = \text{tr}(B)$

7. Justifier que ρ est bien une racine simple

Partie III :

A désigne toujours une matrice positive inversible

On se propose désormais de prouver l'existence d'une valeur propre positive associée à un vecteur propre positif.

1. Soit $K = \{Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R}), Y \geq 0 \text{ et } \|Y\| = 1\}$ où $\|Y\| = \sum_{i=1}^n |y_i|$

Prouver que $K' = (I_n + A)^{n-1}(K)$ est un compact de $\mathbf{R}^n$ et que $K' \subset (\mathbf{R}^{*+})^n$

2. Soit $r(X) = \inf_{i \in [1, n]} \left(\frac{1}{x_i} \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right)$ où (x_i) sont les coordonnées de X

Justifier l'existence de $\lambda = \sup_{X \in K'} r(X)$ et prouver l'existence de $X_0 \in K'$ tel que $r(X_0) = \lambda$

3.a. : Justifier que $AX_0 - \lambda X_0 \geq 0$

3.b. : On suppose $AX_0 - \lambda X_0 \neq 0$, prouver l'existence de $Y_0 > 0$ tel que $AY_0 - \lambda Y_0 > 0$

3.c. : En déduire une contradiction avec la définition de λ